

**ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS DINÁMICOS GENERADOS EN UN  
TRANSFORMADOR DE HASTA 10 MVA DURANTE UNA CONDICIÓN DE  
CORTOCIRCUITO FRANCO**

**WILVER CORREA BRAVO**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA  
PROGRAMA DE PREGRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SANTIAGO DE CALI  
2015**

**ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS DINÁMICOS GENERADOS EN UN  
TRANSFORMADOR DE HASTA 10 MVA DURANTE UNA CONDICIÓN DE  
CORTOCIRCUITO FRANCO**

**WILVER CORREA BRAVO**

**Trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de Ingeniero  
Electricista**

**Director  
Profesor, GUILLERMO APONTE MAYOR  
Ingeniero Electricista, Ph.D**

**Director  
Profesor, DIEGO FERNANDO GARCÍA  
Ingeniero Electricista, Ph.D**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA  
PROGRAMA DE PREGRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SANTIAGO DE CALI  
2015**

**Nota de aceptación:**

---

---

---

---

---

---

Director Del Proyecto  
Guillermo Aponte Mayor  
Profesor, Ingeniero Electricista, Ph.D  
Director de GRALTA

---

Director Del Proyecto  
Diego Fernando García  
Profesor, Ingeniero Electricista, Ph.D

Santiago de Cali, \_\_ de \_\_\_\_\_ de 2015.

## AGRADECIMIENTOS

La ayuda que otros nos pueden dar nunca está de más, agradezco al profesor Eduardo Marlés que dedico un espacio de su tiempo para encontrar la solución a los problemas que se presentaron durante el desarrollo de este proyecto. Agradezco también a los directores del proyecto por su seguimiento y correcciones.

A mis compañeros de carrera que compartimos las noches de trabajos y los días de relajo, aprendimos riéndonos y terminamos el pregrado siendo más que compañeros de estudio.

A mis padres que fueron incondicionales durante mi época como estudiante, y lo han sido a lo largo de mi vida. A mis hermanos que no me ayudaron en algo pero no los podía dejar por fuera de esta página.

A Vanessa, que ha sido la mayor bendición que he recibido, tu apoyo y comprensión han sido muy importantes, gracias a ti fue más fácil continuar.

*“Si tú puedes encontrar un camino sin obstáculos, este probablemente te conduce a ningún lugar” - Frank A. Clark.*

## CONTENIDO

pág.

RESUMEN .....	9
INTRODUCCIÓN .....	10
1. BASES TEÓRICAS DE LOS FENÓMENOS ELECTROMAGNÉTICOS Y MECÁNICOS DEL TRANSFORMADOR .....	11
1.1 FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS .....	11
1.1.1 Comportamiento Dinámico .....	14
1.1.2 Orientación de las fuerzas .....	16
1.1.3 Resonancia .....	18
1.1.4 Efectos de las corrientes de cortocircuito .....	21
1.2 EFECTOS COLATERALES PRODUCIDOS POR LOS ESFUERZOS DINÁMICOS DE CORTOCIRCUITO .....	23
1.2.1 Fallos debidos a fuerzas radiales .....	23
1.2.2 Fallos debidos a fuerzas axiales .....	27
1.2.3 Fallos debidos a la acción combinada de las fuerzas .....	32
1.2.4 Otros tipos de fallos .....	33
2. PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE LA CORRIENTE Y FUERZAS DE CORTO CIRCUITO .....	35
2.1 NATURALEZA DE LA CORRIENTE DE CORTOCIRCUITO .....	35
2.1.1 Cálculo de la magnitud de la corriente de cortocircuito. ....	37
2.2 PRINCIPIOS DEL CÁLCULO DE LAS FUERZAS .....	38
2.2.1 Métodos Aproximados .....	39
2.2.2 Métodos Sofisticados .....	44
2.2.3 Método de redes de reluctancia RNM .....	53
2.2.4 Método de Elementos Finitos MEF .....	57
3. SELECCIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO .....	61
3.1 PROCESO DE SELECCIÓN .....	61
3.2 CÁLCULO DE LAS FUERZAS .....	64

3.3 ALGORITMO DEL CÁLCULO DE LA CORRIENTE Y LAS FUERZAS DE CORTOCIRCUITO .....	67
4. HERRAMIENTA COMPUTACIONAL .....	71
5. CONCLUSIONES .....	79
5.1 TRABAJOS FUTUROS .....	79
BIBLIOGRAFÍA .....	81

## LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1. Valores de $\Lambda$ para diferentes configuraciones de las derivaciones de los devanados. ....	43
Tabla 2. Errores porcentuales que presenta cada método comparado con simulaciones por MEF. ....	63
Tabla 3. Calificación en puntajes de cada método. ....	64
Tabla 4. Datos eléctricos del transformador de análisis. ....	71
Tabla 5. Resultados obtenidos con diferente cantidad de armónicos y divisiones en la altura del devanado. ....	75
Tabla 6. Comparación de los resultados obtenidos frente a MEF. ....	75

## LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1. Orientación del campo magnético, la corriente y la fuerza. ....	11
Figura 2. Patrón aproximado de las líneas de flujo de dispersión. ....	13
Figura 3. Corriente de corto circuito y fuerza en función del tiempo. ....	14
Figura 4. Campos acoplados en transformadores. ....	15
Figura 5. Líneas de Flujo de dispersión y fuerzas en un transformador. ....	17
Figura 6. Dirección de las fuerzas radiales en los devanados de un transformador. .....	17
Figura 7. Desplazamiento axial de los devanados de un transformador bajo condición de cortocircuito. ....	18
Figura 8. Representación de un devanado y sus soportes finales. ....	19
Figura 9. Representación del devanado de un transformador. ....	20
Figura 10. Fenómeno de deformación de los devanados por esfuerzos radiales .	25
Figura 11. Flexión entre espaciadores radiales. ....	27
Figura 12. Colapso de un devanado tipo disco. ....	28
Figura 13. Media inclinación en un devanado de capas. ....	29
Figura 14. Inclinación en capas de devanados con CTC. ....	30
Figura 15. Fuerza de inclinación crítica frente al número de hilos en el CTC. ....	31
Figura 16. Espiral en devanados helicoidales. ....	32
Figura 17. Circuito equivalente para el análisis de cortocircuito. ....	35
Figura 18. Corriente de cortocircuito $i(t)$ en un sistema eléctrico. ....	36
Figura 19. Factor de pico de la corriente de cortocircuito en función de la relación $X/R$ . ....	37
Figura 20. Determinación del diagrama de ampere-vuelta residual para un devanado con derivaciones en un extremo. ....	41
Figura 21. Configuración asumida para el cálculo del flujo radial. ....	42
Figura 22. Representación en dos dimensiones de la ventana de un transformador. .....	45
Figura 23. Región de la ventana del transformador con conductores. ....	45
Figura 24. Devanado básico único y distribución axial de ampere-vuelta. ....	47
Figura 25. Ventana del transformador dividida en subdominios. ....	50



Figura 26. Bobinas de orden $j$ , pertenecientes a los dos devanados del transformador. ....	50
Figura 27. Dominio de cálculo para determinar el campo magnético de dispersión. ....	53
Figura 28. Elemento rectangular de la red de reluctancia en 2D. ....	54
Figura 29. Circuito equivalente de reluctancia de una red. ....	55
Figura 30. Modelo de red de reluctancia del campo de dispersión de un transformador de potencia con diferente cantidad de nodos. ....	56
Figura 31. Modelo de red de reluctancia 3D equivalente básico para el campo de dispersión de un transformador trifásico de potencia. ....	56
Figura 32. Subdominio triangular para un problema de MEF en 2D. ....	58
Figura 33. Geometría y mallado en programa de MEF para caso de estudio de esfuerzos de cortocircuito en un transformador. ....	60
Figura 34. Algoritmo para el cálculo de la corriente de cortocircuito. ....	69
Figura 35. Algoritmo para el cálculo de las fuerzas de cortocircuito. ....	70
Figura 36. Sección transversal del transformador objeto de estudio. ....	72
Figura 37. Fuerzas calculadas con 20 armónicos y 100 divisiones en la altura. ....	72
Figura 38. Fuerzas calculadas con 30 armónicos y 100 divisiones en la altura. ....	73
Figura 39. Fuerzas calculadas con 60 armónicos y 100 divisiones en la altura. ....	73
Figura 40. Fuerzas calculadas con 30 armónicos y 1000 divisiones en la altura. ....	74
Figura 41. Fuerzas calculadas con 30 armónicos y 10000 divisiones en la altura. ....	74
Figura 42. Graficas de referencia basadas en otro caso de estudio. ....	76

## RESUMEN

Durante el funcionamiento normal del transformador se presentan fuerzas electromagnéticas de magnitud reducida, sin embargo crecen considerablemente cuando se presenta una falla de cortocircuito externa. Estas fuerzas electromagnéticas que hay dentro de un transformador, pueden deformar los devanados conduciéndolos a una falla, con el objetivo de calcular los esfuerzos presentados bajo una condición de cortocircuito, se revisaron los métodos de cálculo existentes y se seleccionó uno de ellos. La metodología de cálculo se implementó en una herramienta computacional (MATLAB®), se analizaron los resultados obtenidos, comparándolos con los encontrados por medio del método de elementos finitos de acuerdo a la bibliografía consultada. Por último se presentan las conclusiones y se proponen trabajos futuros relacionados con la temática evaluada.

Palabras clave: Fuerzas, cortocircuito, electromagnético, devanados, métodos, elementos finitos.

## ABSTRACT

*During the normal operation of a transformer, negligible electromagnetic forces are present, however grow significantly when external short circuit failure occurs. These electromagnetic forces within a transformer can deform the windings leading them to a failure mode if the critical characteristic limits of each fault are exceeded. In order to establish the effort presented in the short circuit condition, the calculation methods are investigated and one of them is selected. This is implemented in a computational tool in MATLAB® and the results are analyzed and compared with those found by means of the finite element method available in the bibliography consulted. Finally, some problems found during the application of the selected method are reported and future works are proposed for their solution.*

*Keywords: Forces, short circuit, electromagnetics, windings, methods, finite elements.*

## **INTRODUCCIÓN**

A lo largo de la vida de operación del transformador se pueden presentar situaciones anormales que pueden someterlo a condiciones exigentes por la generación abrupta de esfuerzos dinámicos, estos pueden ser originados por corrientes de cortocircuito que son elevadas comparadas con la corriente nominal de estos equipos.

Se puede determinar la capacidad que tiene un transformador para soportar los esfuerzos de cortocircuito a través de la prueba de aptitud al corto circuito. El limitante de este ensayo es que requiere de una fuente de alimentación de gran potencia y con niveles variables de tensión.

Esto dificulta la realización del ensayo generando sobrecostos por transporte y tiempos de ensayo prolongados ya que los fabricantes deben enviar sus equipos a laboratorios que están alejados de su ubicación. La Norma IEC 60076-5 del 2006, la cual define los requisitos que deben cumplir los transformadores ante una condición de cortocircuito, genera la posibilidad de satisfacer este inconveniente de los fabricantes y clientes del sector eléctrico a través del cálculo analítico de los esfuerzos térmicos y dinámicos presentes en un transformador bajo una condición de cortocircuito franco.

Gracias a esta posibilidad, se inicia una investigación que tiene como objetivo analizar el comportamiento de los esfuerzos dinámicos presentes en un transformador bajo una condición de cortocircuito franco y sus efectos colaterales en las principales partes constitutivas de este equipo, esto con el fin de estimar analíticamente los esfuerzos dinámicos de un transformador bajo una condición de cortocircuito franco y caracterizar los efectos colaterales producidos en el interior de un transformador durante esta condición.

En el presente trabajo de grado se indican los fenómenos electromagnéticos, mecánicos y dinámicos que ocurren en un transformador durante el cortocircuito externo. Además se describen y clasifican los diferentes modos de falla que se pueden presentar. También se abordan los métodos de cálculo que se emplean para calcular los esfuerzos bajo una condición de cortocircuito franco, se seleccionó uno de estos métodos para ser implementado en una herramienta de cálculo, la selección del método se efectuó teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo y recursos característicos de un trabajo de pregrado.

## 1. BASES TEÓRICAS DE LOS FENÓMENOS ELECTROMAGNÉTICOS Y MECÁNICOS DEL TRANSFORMADOR

### 1.1 FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS

Cuando un elemento de corriente, por ejemplo un conductor portador de corriente con una longitud determinada, se encuentra dentro de un campo magnético, se origina una fuerza aplicada a ese elemento de corriente con una magnitud dada por la relación de la ecuación (1):

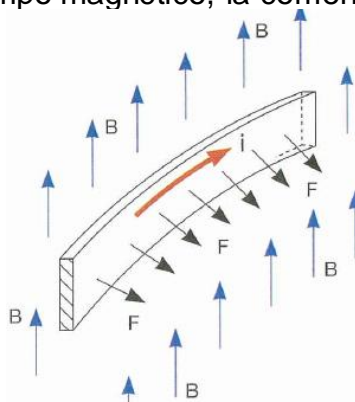
$$F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin(\alpha) \quad (1)$$

Dónde:

$F$  es la fuerza en N,  $I$  la intensidad de corriente en A,  $B$  la densidad de flujo en T,  $l$  la longitud del conductor en m,  $\alpha$  es el ángulo entre el vector de la densidad de flujo y el vector de densidad de corriente.

La dirección de la fuerza es perpendicular al plano que contiene los vectores de densidad de campo magnético y de densidad de corriente, su orientación se observa en la Figura 1.

Figura 1. Orientación del campo magnético, la corriente y la fuerza.



**Fuente:** BERTAGNOLLI, Giorgio. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. p 31.

En un transformador, hay una combinación entre elementos que llevan corriente y la densidad de flujo magnético, que corresponde al flujo de dispersión, originado por los propios arrollamientos. Por lo tanto, también habrá fuerzas

electromagnéticas que actúan sobre los devanados durante el funcionamiento normal del transformador<sup>1</sup>.

Para determinar la fuerza, es necesario calcular la densidad de flujo magnético, mientras que la corriente, se define directamente por la configuración física de los conductores del bobinado. Una vez que se determina la intensidad y dirección del vector de densidad de flujo local en cualquier lugar, el patrón de fuerza se encuentra inmediatamente. Para este análisis de las fuerzas electromagnéticas deben tenerse en cuenta los siguientes aspectos:

- Las fuerzas electromagnéticas son de repulsión entre pares de bobinas portadoras de corriente que van en direcciones opuestas, de acuerdo con las reglas elementales para fuerzas: conductores en paralelo con la misma dirección de la corriente se atraen, y con direcciones opuestas se repelen.
- En devanados concéntricos, las fuerzas actúan mayormente en la dirección radial. En la mitad de la altura del devanado, el flujo es mayormente axial y las fuerzas netamente radiales. En general, no hay contribución significativa a la fuerza axial sobre aproximadamente 2/3 de la longitud total del devanado.
- En transformadores tipo acorazados, las fuerzas actúan mayormente de forma perpendicular a las superficies de la bobina “panqueque”.
- En los extremos de las bobinas de unidades tipo núcleo y en paralelo a las superficies de las bobinas “panqueque” en unidades de tipo acorazado, las líneas de campo son curvas y las fuerzas presentan componentes axiales importantes. Ambas tienden a comprimir las bobinas para reducir su longitud axial en los del tipo núcleo, y su ancho radial en los de tipo acorazado.

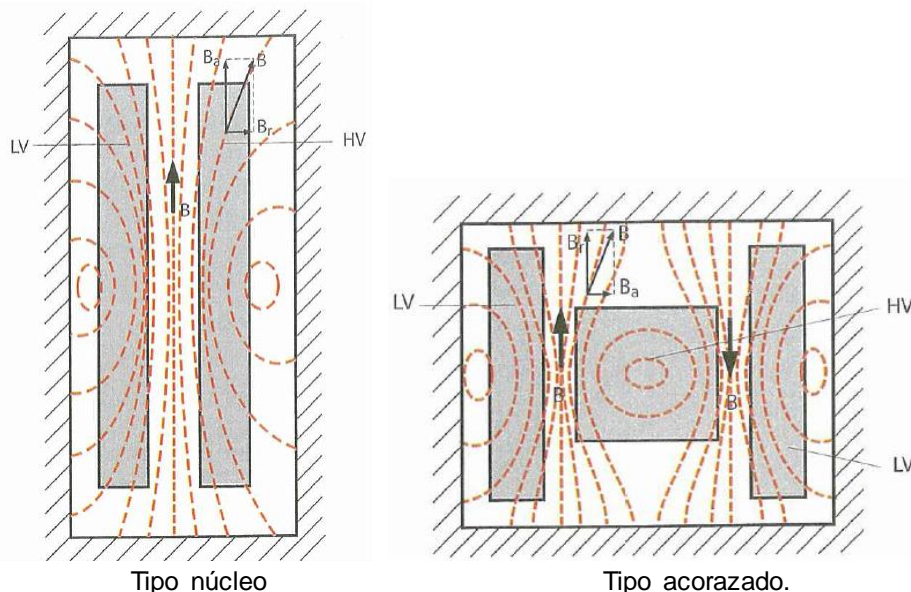
El patrón del flujo de dispersión depende de la geometría global del transformador, especialmente del núcleo y los devanados, y de la permeabilidad relativa de los materiales, como se observa en la Figura 2. La densidad de flujo magnético depende de la reluctancia magnética de la trayectoria de aire, que es constante y no muestra ningún efecto de saturación como lo hacen los materiales magnéticos, y es sustancialmente proporcional a la fuerza magneto-motriz producida por los devanados<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> BERTAGNOLLI, G. Short-Circuit Duty of Power Transformers. 3 Ed. Zurich: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 31.

<sup>2</sup> Ibid., p. 32.

Como resultado del producto entre la densidad de flujo magnético y la corriente del devanado, las fuerzas electromagnéticas aplicadas a los conductores del devanado son proporcionales al cuadrado de las corrientes de bobinado. Esto significa que, en condiciones de cortocircuito, las fuerzas son básicamente dos órdenes de magnitud superiores a las que tienen lugar en el funcionamiento nominal<sup>3</sup>.

Figura 2. Patrón aproximado de las líneas de flujo de dispersión.



**Fuente:** BERTAGNOLLI, Giorgio. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. p 34.

Debido a su dependencia con el cuadrado de la intensidad, las fuerzas electromagnéticas son unidireccionales y del tipo pulsante<sup>4</sup>. En el caso de las corrientes puramente sinusoidales, la fuerza electromagnética se expresa por la ecuación (2) :

$$F(t) = F_{\max} \cdot \left( \frac{1}{2} + e^{-2t/\tau} - 2 \cdot e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \right) \quad (2)$$

Dónde:

$F_{\max}$  es la fuerza de pico máximo,  $\omega$  la frecuencia angular,  $\tau$  es la constante de tiempo  $L/R$ .

<sup>3</sup> BERTAGNOLLI, G. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 34.

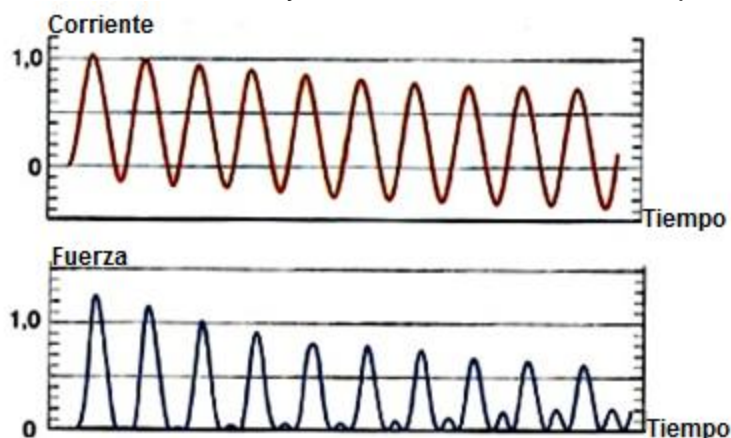
<sup>4</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 3.

Esta fuerza está formada por cuatro componentes, que son:

- Dos componentes unidireccionales, una constante y la otra decreciente en el tiempo.
- Dos componentes alternas, una de frecuencia fundamental decreciente en el tiempo, y la otra del doble de la frecuencia con amplitud constante.

Durante los primeros ciclos, las fuerzas de frecuencia fundamental prevalecen sobre los otros componentes tal como se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Corriente de corto circuito y fuerza en función del tiempo.



**Fuente:** BERTAGNOLLI, Giorgio. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 35.

Debido al decrecimiento exponencial de la curva de corriente de cortocircuito, la magnitud de los picos de fuerza se reduce en gran medida después de sólo unos pocos ciclos<sup>5</sup>.

### 1.1.1 Comportamiento Dinámico

El comportamiento dinámico está asociado con la dependencia del tiempo de la corriente de cortocircuito instantánea y la fuerza correspondiente, más el desplazamiento de los devanados que producen modificaciones instantáneas de estas fuerzas. La inercia de los conductores, las fuerzas de fricción y las fuerzas de reacción en diversos elementos elásticos del sistema juegan un papel importante en la descripción de la respuesta dinámica<sup>6</sup>.

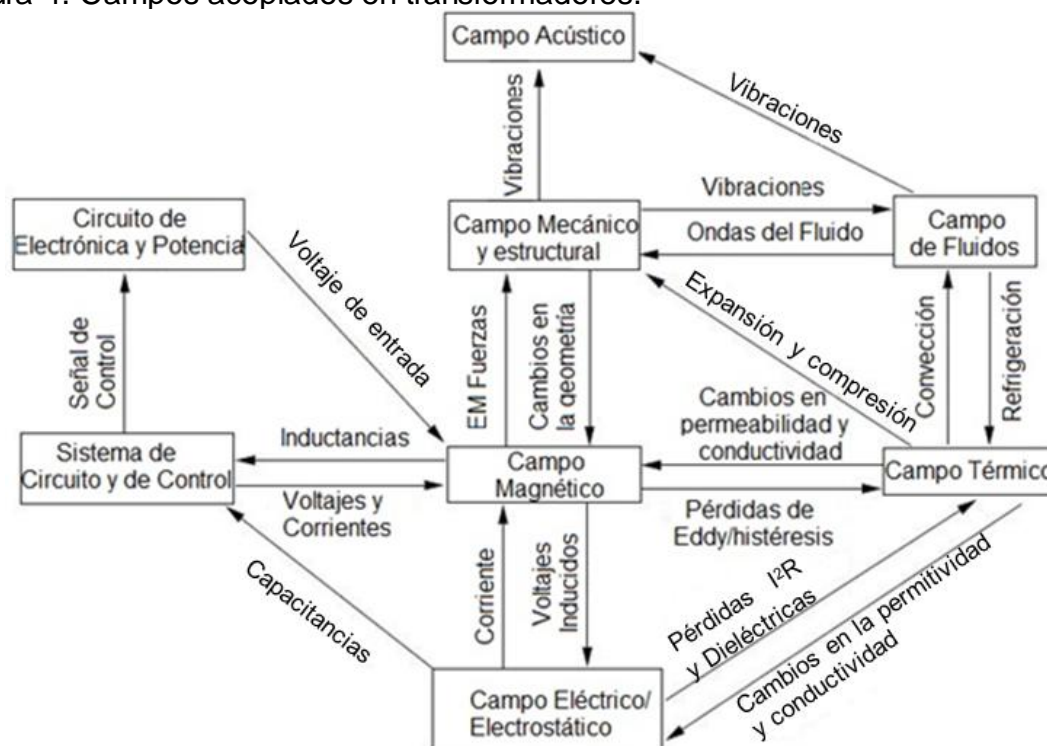
<sup>5</sup> BERTAGNOLLI, G. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 35.

<sup>6</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 260.

Los métodos de cálculo de la respuesta dinámica tienen en cuenta la tensión mecánica previa aplicada, la rigidez de la estructura de sujeción y la proximidad del tanque u otros devanados. También tienen en cuenta los efectos de los desplazamientos de los conductores y las características no lineales de los materiales aislantes. Además se considera el efecto de masa hidrodinámica agregada por el aceite en el aislamiento impregnado. Teniendo en cuenta todo lo anterior, se ha reportado que las fuerzas dinámicas tienen magnitudes y formas de onda completamente diferentes en comparación con las fuerzas electromagnéticas aplicadas<sup>7</sup>.

Para hacer una adecuada descripción del comportamiento dinámico del transformador, se hace uso de campos acoplados, que se refiere a un sistema de interacción entre campos físicos como: eléctrico, magnético, mecánico, térmico, gravitacional, de fluidos, etc<sup>8</sup>. Una representación de este sistema se puede observar en la Figura 4.

Figura 4. Campos acoplados en transformadores.



**Fuente:** KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 539.

<sup>7</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 261.

<sup>8</sup> SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 234.



Se pueden presentar dos tipos de acoplamiento; el fuertemente acoplado, o directamente acoplado, y el débilmente acoplado, o indirectamente acoplado. Esta clasificación se basa principalmente en el grado de no linealidad y del tiempo relativo de las constantes de los campos acoplados<sup>9</sup>.

Un problema débilmente acoplado se resuelve utilizando algoritmos en cascada, en el que los campos acoplados se resuelven en pasos sucesivos. En el caso fuertemente acoplado, las ecuaciones que representan los campos se resuelven simultáneamente con todas las variables necesarias<sup>10</sup>.

De esta manera, los cálculos dinámicos sin duda pueden aumentar el conocimiento teórico de todo el fenómeno, pero es difícil determinar la validez de los resultados obtenidos. Por el contrario, es bastante fácil de calcular el esfuerzo máximo presentado y las frecuencias naturales de los devanados para comprobar la ausencia de resonancias. Por lo tanto, los cálculos estáticos bien establecidos, junto con la determinación de frecuencias naturales podrían formar una base de cálculos de resistencia de cortocircuito hasta que los procedimientos de análisis dinámicos se perfeccionen y estandaricen<sup>11</sup>.

Teniendo en cuenta lo anterior se describen las fuerzas y la frecuencia de resonancia presentes en el devanado.

### 1.1.2 Orientación de las fuerzas

Las fuerzas electromagnéticas generadas en un transformador de tipo núcleo con devanados uniformes y alineados axialmente se muestran en la Figura 5. La componente principal de flujo de dispersión es axial y su interacción con las corrientes del devanado produce fuerzas radiales que actúan hacia el exterior sobre el bobinado exterior y hacia el interior en el devanado interno<sup>12</sup>, como se muestra en la Figura 6, las fuerzas radiales sobre los devanados tienden a deformarlos para reducir al mínimo la densidad de energía magnética almacenada en su volumen<sup>13</sup>.

<sup>9</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 538.

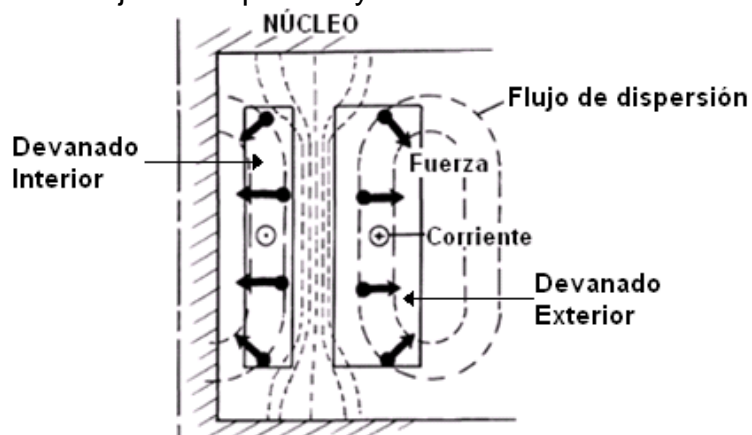
<sup>10</sup> Ibid., p. 538-539.

<sup>11</sup> Ibid. p. 262.

<sup>12</sup> W. J. McNutt, et al. Power Transformer Short Circuit Strength Requirements, Design and Demonstration. En: IEEE Trans. Power Apparatus and Systems. Nov./Dec. 1970, vol. PAS-89, p. 1956.

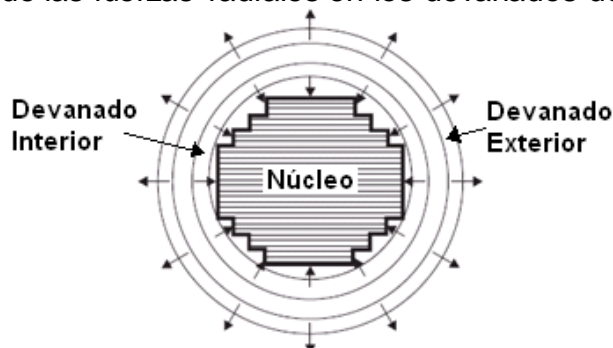
<sup>13</sup> FOGELBERG T. Short-Circuit Withstand Capability of Power Transformers. En: ABB Review - Transformers and Substations. 2008, no. 1, p. 27.

Figura 5. Líneas de Flujo de dispersión y fuerzas en un transformador.



**Fuente:** W. J. McNutt, W. M. Johnson, R. A. Nelson and R. E. Ayers *Power Transformer Short Circuit Strength-Requirements, Design and Demonstration. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, p.1956.

Figura 6. Dirección de las fuerzas radiales en los devanados de un transformador.



**Fuente:** Dasgupta, I. *Power Transformer Quality Assurance. New Age International, New Delhi, Jan 1, 2009. p. 439.*

Cerca de los extremos del bobinado el flujo de dispersión tiene una componente radial, buscando el camino de menor reluctancia y acortar su camino de retorno<sup>14</sup>, esta componente radial produce una fuerza axial de compresión en los devanados.

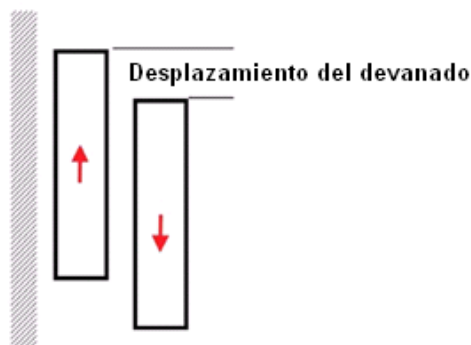
Si los devanados son de la misma longitud y están ubicados con sus centros geométricos alineados, cada devanado se somete a una compresión moderada que no produce una fuerza axial resultante que desplace los devanados. Sin embargo la posición exacta de los devanados por medios mecánicos es casi imposible.

Como los devanados conducen corrientes que fluyen en direcciones opuestas y hay grandes fuerzas de repulsión entre ellos, cualquier desplazamiento de sus

<sup>14</sup> W. J. McNutt, et al. *Power Transformer Short Circuit Strength Requirements, Design and Demonstration. En: IEEE Trans. Power Apparatus and Systems. Nov./Dec. 1970, vol. PAS-89, p. 1956.*

centros geométricos puede dar lugar a una gran componente axial de la fuerza que tiende a separar los devanados, aumentando así el desplazamiento desde la posición de equilibrio. Los dos devanados se repelen entre sí con una fuerza que es proporcional al desplazamiento del punto de equilibrio entre ellos<sup>15,16</sup>, este desplazamiento se observa en la Figura 7.

Figura 7. Desplazamiento axial de los devanados de un transformador bajo condición de cortocircuito.



**Fuente:** MAHOMED, N. *Electromagnetic forces in transformers under short circuit conditions*. Powertech Transformers Energize, 2011. p. 40.

A pesar de que las fuerzas axiales son significativamente más pequeñas que las fuerzas radiales, resultan ser más difíciles de contener. Durante el pico de la onda de corriente, las capas o discos de los devanados se presionan uno contra el otro, aliviando la tensión en las estructuras de sujeción, y luego los devanados se enderezan durante el cruce por cero de la corriente. En este punto las estructuras de sujeción tienen que llevar la presión a un valor elevado<sup>17</sup>.

### 1.1.3 Resonancia

Los conductores, el sistema de aislamiento y las sujeciones constituyen un sistema mecánico que tiene masa y elasticidad, estos factores deben ser considerados en el estudio de los desplazamientos y esfuerzos producidos por las fuerzas de cortocircuito<sup>18</sup>.

<sup>15</sup> DASGUPTA, I. *Power Transformer Quality Assurance*. New Age International, New Delhi, Jan 1, 2009. p. 439.

<sup>16</sup> MAHOMED, N. *Electromagnetic forces in transformers under short circuit conditions*. En: Powertech Transformers Energize, march 2011. p. 40.

<sup>17</sup> KRAETGE, Alexander. *Diagnosis of the short circuit duty of power transformers*. En: Diagnostic Measurements on Power Transformers OMICRON, 2006. p. 2.

<sup>18</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 15.

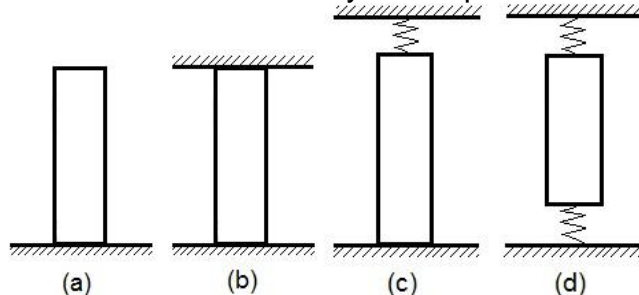
Cuando se aplica una fuerza a una estructura elástica se produce un desplazamiento, y por lo tanto la tensión, depende no sólo de la magnitud de la fuerza y la forma en que varía con el tiempo, sino también de la frecuencia natural mecánica de la estructura<sup>19</sup>.

La fuerza de cortocircuito tiene dos componentes alternas, una con amplitud pequeña pero con frecuencia del doble de la red, y la otra decreciente exponencialmente en el tiempo con frecuencia igual a la de la red. Por lo tanto existe la posibilidad de resonancia del sistema mecánico debido a que las fuerzas aplicadas a los devanados y al sistema de sujeción, puede tener una frecuencia natural cercana a la frecuencia de la red o al doble de ella<sup>20</sup>.

Analizando las dos componentes de la fuerza, en el caso de las fuerzas radiales, la elasticidad del conductor es alta y la masa pequeña, de modo que la frecuencia natural es grande en comparación con la frecuencia de la red o el doble de ella, así que hay pocas posibilidades de producir incrementos por los efectos de resonancia. Sin embargo, para las fuerzas axiales que actúan sobre el aislamiento de papel y cartón prensado que es fácilmente compresible, la frecuencia natural mecánica puede estar cerca de las componentes de frecuencia de la fuerza de corto-circuito<sup>21</sup>.

El devanado puede considerarse como una columna elástica longitudinal uniforme con extremos que pueden ser fijos, moverse libremente o ser elásticos, como se muestra en la Figura 8. Cada caso produce un modo de vibración diferente.

Figura 8. Representación de un devanado y sus soportes finales.



a) Un soporte rígido, b) dos soportes rígidos, c) un soporte rígido y uno elástico, d) dos soportes elásticos.

**Fuente:** MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 95-96.

<sup>19</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 94.

<sup>20</sup> *Ibid.* p. 3.

<sup>21</sup> *Ibid.* p. 15.

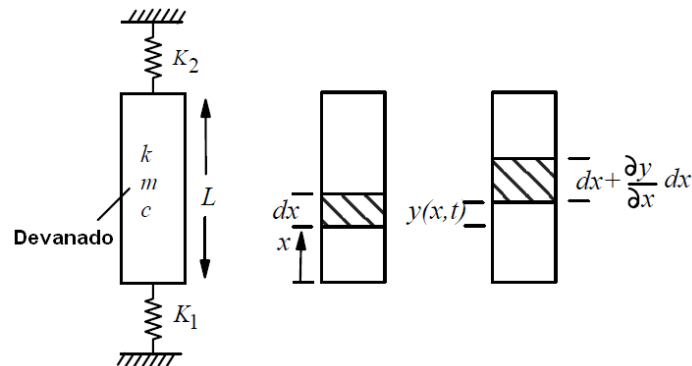
Considerando el caso más común, un transformador de tipo núcleo, los devanados se sujetan con placas en los extremos superior e inferior hechas de un material aislante. En este caso el devanado se representa por un sistema como el indicado en la Figura 9. La ecuación que describe el movimiento en este caso es:

$$F(y, t) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} + k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

Dónde:

$y(x, t)$  es el desplazamiento, desde una posición de reposo, de cualquier punto a una distancia vertical  $x$ ,  $m$  es la masa del bobinado por unidad de longitud,  $c$  es el factor de amortiguamiento por unidad de longitud,  $k$  es la rigidez por unidad de longitud, y  $F$  es la fuerza electromagnética aplicada por unidad de longitud.

Figura 9. Representación del devanado de un transformador.



**Fuente:** KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 263.

Una expresión para la frecuencia natural,  $\omega_n$  (en rad / s), se puede derivar de la ecuación anterior con las condiciones iniciales donde el desplazamiento y la velocidad en cualquier posición  $x$  son cero en  $t = 0$ , y la fuerza neta que actúa en las posiciones  $x = 0$  y  $x = L$  es cero. La expresión sería:

$$\omega_n = \lambda_n \cdot \sqrt{\frac{K}{M}} = \lambda_n \cdot \sqrt{\frac{k/L}{m \cdot L}} \quad (4)$$

Dónde:

$\lambda_n$  es el valor propio correspondiente a la frecuencia natural  $n^{th}$ ,  $M$  es la masa total del devanado,  $L$  es la altura de la bobina, y  $K$  es la rigidez mecánica de bobinado.

La rigidez por unidad de longitud  $k$  del devanado está dada por:

$$k = \frac{A \cdot E_{eq}}{L_{eq}} \quad (5)$$

Dónde:

$A$  es el área del aislamiento,  $E_{eq}$  es el módulo de Young equivalente del devanado, y  $L_{eq}$  es la longitud equivalente del devanado.

El módulo equivalente de Young puede calcularse como:

$$\frac{E_{eq}}{L_{eq}} = \frac{E_p \cdot E_b}{E_p \cdot L_b + L_p \cdot E_b} \quad (6)$$

Dónde:

$E_{eq}$  es el módulo de elasticidad del sistema de aislamiento combinado de papel y cartón prensado,  $E_p$  es el módulo de elasticidad del papel, y  $E_b$  es el módulo de elasticidad del cartón. Los términos  $L_p$ ,  $L_b$  y  $L_{eq}$  representan el grosor del papel, el espesor del cartón prensado, y el espesor equivalente total del aislamiento de papel y cartón prensado, respectivamente.

Los valores propios  $\lambda_n$  se calculan utilizando la siguiente ecuación:

$$\tan(\lambda) = \frac{\left( \frac{K_1}{K} + \frac{K_2}{K} \right) \cdot \lambda}{\lambda^2 - \frac{K_1 \cdot K_2}{K^2}} \quad (7)$$

Dónde:

$K_1$  y  $K_2$  son los valores de rigidez de los aislamientos superior e inferior, respectivamente.

Considerando las expresiones anteriores se puede determinar la frecuencia mecánica de resonancia para el devanado, y establecer si está cerca o no de la frecuencia de la red o del doble de ella.

#### 1.1.4 Efectos de las corrientes de cortocircuito

En un transformador cuyo primario se alimenta desde la red de suministro a tensión nominal y cuyo secundario está en cortocircuito, la magnitud de las corrientes que fluyen en sus devanados primario y secundario está determinada por la impedancia de cortocircuito del transformador. Esta corriente de cortocircuito es de 8 a 10 veces la corriente nominal en los transformadores más

grandes y de 20 a 25 veces en unidades más pequeñas. De esta manera, los esfuerzos electrodinámicos que surgen durante un cortocircuito pueden ser de miles de Newtons en comparación con unos pocos Newtons asociados a la corriente de carga nominal.<sup>22</sup>

En el período comprendido entre la aparición y la interrupción de la falla, la mayor parte del calor desarrollado en el material conductor no deja el devanado, debido a que la constante de tiempo térmica es de varios minutos, pero aumentará su temperatura. El aumento de temperatura causa una considerable dilatación, imponiendo una mayor presión sobre el bobinado y los materiales aislantes<sup>23</sup>.

Los efectos de las corrientes de cortocircuito dependen del tipo de falla y de la magnitud de la corriente dependiendo de estos factores habrá una afectación mayor o menor en el transformador durante esta condición.

#### 1.1.4.1 *Según el tipo de falla*

La mayoría de las fallas en los sistemas de potencia son línea a tierra. Le siguen las fallas línea a línea, fallas línea-línea a tierra, y finalmente las fallas trifásicas las cuales ocurren en pocas ocasiones.

Con fallas monofásicas la corriente es mucho menor que la corriente de falla trifásica. Esto reduce considerablemente los esfuerzos en comparación con la falla trifásica. Pero, cuando la relación entre la impedancia de secuencia cero a la impedancia de secuencia positiva es menor que 1, se puede obtener una corriente de falla mayor que el caso de una falla trifásica. A excepción de estos casos específicos, usualmente la falla trifásica representa la condición más severa<sup>24</sup>.

Cuando un transformador se utiliza como el único punto a tierra de un sistema muy grande, la corriente suministrada al cortocircuito a tierra por la fase en falla del transformador nunca excede la corriente de cortocircuito trifásico. Sin embargo, las fases sin falla transportan corrientes que dependen de las impedancias relativas del transformador y el sistema. Estas corrientes están en fase, por lo tanto no hay ninguna concentración de flujo de dispersión en la ventana, sino más bien una reducción, esto conlleva a que los esfuerzos que

<sup>22</sup> KARSAL, Károly; KERÉNYI, Dénes y KISS, László. Large Power Transformers. (Studies in Electrical and Electronic Engineering, Vol 25), Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987. p. 120.

<sup>23</sup> Ibid. p. 121.

<sup>24</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 244.

aparecen bajo este caso de falla sean menores que los producidos en otra condición de cortocircuito<sup>25</sup>.

En el caso de una falla línea a línea, la corriente es solamente una fracción  $\sqrt{3}/2$  de la corriente de cortocircuito trifásica y las fuerzas se redujeron en una proporción de 4:3. Sin embargo, ambas columnas tienen la misma corriente aumentando la interacción entre las extremidades, con respecto al caso de falla trifásica, esto conlleva a un aumento en las fuerzas en la ventana del transformador. Sin embargo se supone que la reducción de la corriente será tal que las fuerzas en la ventana no superaran las producidas en un caso de cortocircuito trifásico<sup>26</sup>.

En el caso de una falla línea-línea a tierra, las corrientes de falla entregadas por el transformador utilizado para la conexión a tierra del sistema pueden ser igual a la corriente de cortocircuito trifásica, pero el desfase es tal que cuando la corriente es máxima en una de las fases en falla, la corriente en la otra fase es igual a la mitad del valor máximo. Así, las fuerzas no exceden las ejercidas bajo una condición de cortocircuito trifásico<sup>26</sup>.

Por lo anterior, las fallas trifásicas permiten obtener los mayores esfuerzos de cortocircuito en un transformador, y la práctica usual es diseñar un transformador para soportar un cortocircuito trifásico en sus terminales, se asumen que los otros devanados están conectados a un sistema infinito.

## 1.2 EFECTOS COLATERALES PRODUCIDOS POR LOS ESFUERZOS DINÁMICOS DE CORTOCIRCUITO

Se pueden clasificar los efectos según la componente de fuerza que la provoca, obteniéndose así, tres divisiones: efectos producidos por la fuerza radial, la fuerza axial y el efecto combinado de ambas.

### 1.2.1 Fallos debidos a fuerzas radiales

La fuerza radial, como se ha mencionado, tiene dirección diferente dependiendo si el devanado es el exterior o el interior. En este orden de ideas se presentan los siguientes casos.

---

<sup>25</sup> MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966. p. 6-7.

<sup>26</sup> Ibid. p. 7.



### 1.2.1.1 *Devanado exterior*

Durante un corto circuito, el devanado exterior está sujeto a una fuerza radial dirigida hacia el exterior del devanado de manera perpendicular con la columna del núcleo, produciendo una tensión circunferencial que trata de estirar el conductor. Aquí la fuerza es soportada por el conductor.

Si los conductores en la dirección radial de un devanado de disco o en una capa de un devanado multicapa, están firmemente soportados los unos contra los otros, se puede asumir que tienen una tensión uniforme. En el caso contrario, no hay transferencia de carga entre las capas, y la tensión sería mayor en los conductores adyacentes al conducto de dispersión decreciendo hacia la capa más exterior.

Para devanados de dos capas que no están firmemente soportadas entre ellas, la tensión media para la capa más cercana al canal de dispersión es 1,5 veces mayor que la tensión promedio para las dos capas consideradas juntas. Generalizando, si hay  $L$  capas, la tensión promedio en la  $k$ -ésima capa desde el canal de dispersión es  $2 - [(2k-1)/L]$  veces la tensión promedio de todas las capas consideradas juntas. Por lo tanto, el diseño de devanados exteriores multicapa requiere especiales condiciones de diseño<sup>27</sup>.

En los devanados exteriores se pueden presentar fallos por fuerza radial, si la tensión experimentada por cada conductor excede la tensión de ruptura del material del conductor. En este caso la falla se puede presentar como ruptura del conductor, uniones, desgarre del aislamiento o abultamiento del conductor.

### 1.2.1.2 *Devanado interior*

Los devanados interiores, se someten a una fuerza dirigida hacia el centro de su eje axial, presentándose un problema mucho más difícil ya que se asemejan a un cilindro que colapsa bajo la presión externa. Este tipo de fallos es más probable que el producido en devanados exteriores<sup>28</sup>.

Los conductores del devanado interior pueden fallar por dos modos diferentes, el primero es por flexión entre soportes, y el segundo es por pandeo.

En el caso de la flexión, la tensión producida por los esfuerzos de cortocircuito debe ser menor que la tensión de ruptura del material del conductor. Aquí el

---

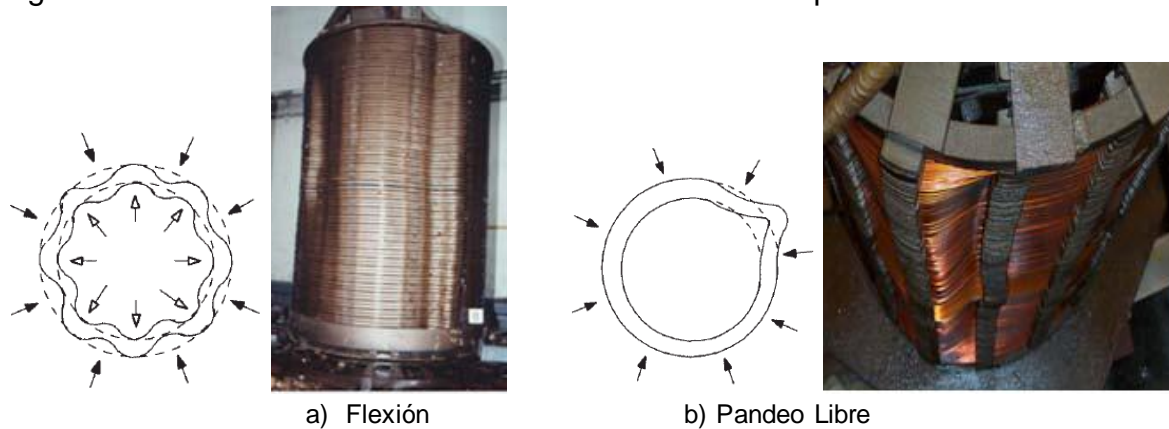
<sup>27</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 257.

<sup>28</sup> *Ibid.*, p. 265.

devanado interior está firmemente soportado por los espaciadores de soporte ubicados axialmente, y la estructura de soporte entera tiene una rigidez mayor que el conductor. Así el conductor puede flexionarse entre los soportes a lo largo de la circunferencia si se excede el límite elástico del material<sup>29</sup>, este tipo de falla se muestra en la Figura 10 a).

En el pandeo, la tensión producida por los esfuerzos de cortocircuito debe ser menor que la tensión de valor crítico, la cual está en función de las propiedades del material así como de los detalles geométricos y constructivos del devanado. El pandeo puede ser forzado o libre.

Figura 10. Fenómeno de deformación de los devanados por esfuerzos radiales



**Fuente:** ROSENTINO, Jr. Arnaldo José, et al. *Modelling and Analysis of Electromechanical Stress in Transformers Caused by Short-Circuits*. En: *Renewable Energy and Power Quality Journal* (2011). ISSN: 2172-038 X. p. 433.

El pandeo forzado ocurre cuando el cilindro interior de soporte tiene una rigidez significativa comparada con la del conductor, esto se logra con un número adecuado de soportes en contacto directo y firme con el núcleo. Este pandeo se puede ver como una secuencia de fallas, iniciada en el conductor más externo moviéndose hacia el conductor más interno. En este caso la tensión crítica de compresión promedio está dada por<sup>30</sup>:

$$\sigma_{avg\_cr} = \frac{E \cdot (t \cdot N_s)^2 \cdot (N_s^2 - 4)}{12 \cdot D_m^2 \cdot N_s^2} \quad (8)$$

Dónde:

$E$  es el módulo de elasticidad del material del conductor,  $N_s$  total de soportes axiales,  $t$  rigidez del conductor, y  $D_m$  el diámetro medio del conductor.

<sup>29</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 266.

<sup>30</sup> *Ibid.* p. 269.

El pandeo libre (Figura 10 b) es esencialmente un pandeo no soportado, en el cual el lapso de la deformación del conductor no tiene relación con la separación entre los soportes axiales. Aquí pueden presentarse uno o más abultamientos a lo largo de la circunferencia del devanado. Esto ocurre muy comúnmente en devanados cilíndricos, cuando la rigidez del conductor es alta comparada con la del cilindro interior y/o el cilindro no está firmemente soportado. Hay muchos factores que pueden conducir a este tipo de fallas, como son falta de sujeción de los devanados, características del material, excentricidades en el devanado, baja rigidez de la estructura de soporte, etc.

En este caso la tensión crítica de compresión promedio está dada por<sup>31</sup>:

$$\sigma_{avg\_cr} = \frac{E \cdot (g)^2}{4 \cdot R^2} \quad (9)$$

Dónde:

$R$  es el radio medio del conductor y  $g$  el espesor radial de este.

Las deformaciones por flexión o pandeo, pueden no conducir a una falla del transformador afectado, pero su capacidad para soportar el cortocircuito puede reducirse drásticamente como resultado de la disminución de las distancias de aislamiento, de papel rasgado y desequilibrio electromagnético en general, todos estos factores contribuyen a que se incrementen los esfuerzos durante cualquier cortocircuito posterior<sup>32</sup>.

Es necesario tener en cuenta que la tensión inducida en el devanado durante el proceso de bobinado tiene algún efecto en el cambio del módulo de elasticidad del material del conductor. Se produce una elasticidad inducida que se adiciona a la generada durante el impacto de la fuerza de cortocircuito. La tensión correspondiente a la elasticidad resultante (una debida al proceso de bobinado y otra a la fuerza de cortocircuito), da el módulo de Young's modificado, el cual debe ser usado para determinar la tensión crítica de pandeo<sup>33</sup>.

<sup>31</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 268.

<sup>32</sup> KRAETGE, Alexander. Diagnosis of the short circuit duty of power transformers. En: *Diagnostic Measurements on Power Transformers* OMICRON, 2006. p. 1.

<sup>33</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 270.

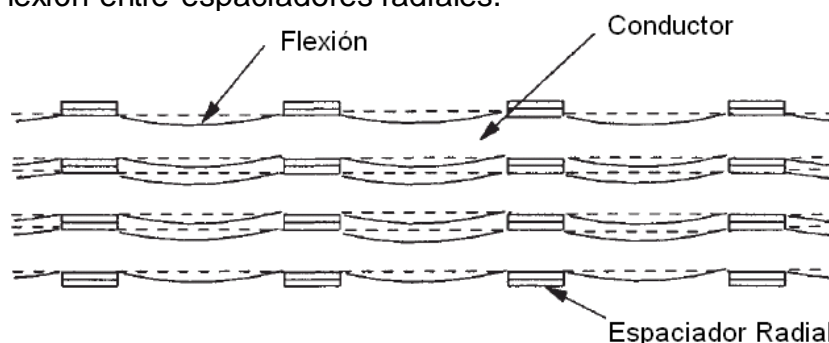
## 1.2.2 Fallos debidos a fuerzas axiales

Existen dos tipos de fallas principales producidas por las fuerzas axiales, estas son la flexión entre separadores y la inclinación del conductor.

### 1.2.2.1 Flexión entre separadores radiales

Bajo la acción de la fuerza axial, el conductor del devanado se dobla entre el espaciador ubicado radialmente como se observa en la Figura 11.

Figura 11. Flexión entre espaciadores radiales.



**Fuente:** KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 272.

La máxima tensión en el conductor debida a la flexión entre espaciadores radiales está dada por:

$$\sigma_{avg-cr} = \frac{F_{AL} \cdot (S)^2}{2 \cdot n \cdot t \cdot w^2} \quad (10)$$

Dónde:

$F_{AL}$  es la carga de flexión máxima igual a  $F_{axial}/(\pi \cdot D_m)$ ,  $S$  es el lapso entre 2 separadores radiales igual a  $((\pi \cdot D_m / N_s) - \text{Ancho del espaciador})$ ,  $N_s$  es el número de espaciadores radiales,  $w$  altura axial del conductor,  $n$  número de conductores en la dirección radial y  $t$  el espesor radial.

Esta tensión máxima debe ser menor que el valor límite para el material del conductor, en caso contrario se presentaría la falla.

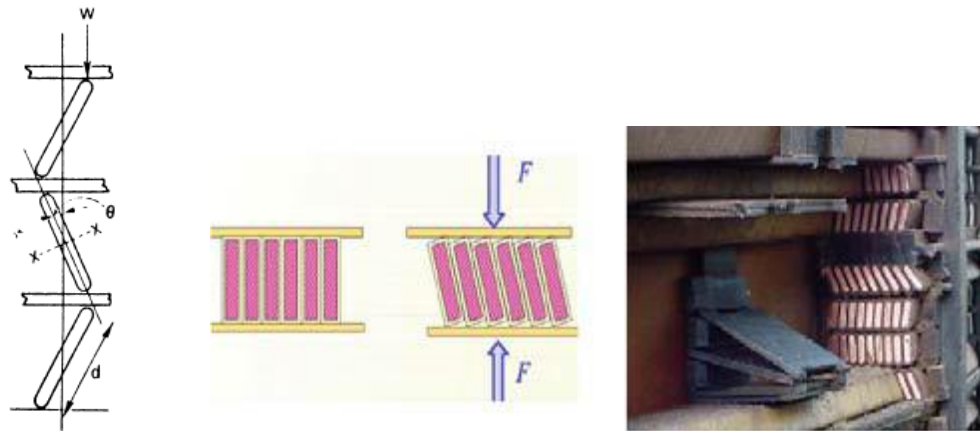
### 1.2.2.2 Inclinación

La falla debida a la inclinación bajo la acción de la fuerza axial es uno de los principales modos de fallas en grandes transformadores de potencia.

Cuando las fuerzas superan el valor límite, se puede producir una falla debido a la inclinación de los conductores en una tendencia en zigzag como se muestra en la

Figura 12 a), en la cual se observa una sección transversal de los conductores inclinados<sup>34</sup>; en este caso la sección transversal del conductor se rota alrededor del eje perpendicular de simetría. En la Figura 12 b) se observa la aplicación de las fuerzas axiales, y en la Figura 12 c) se muestra la inclinación en un devanado real.

Figura 12. Colapso de un devanado tipo disco.



a) \*Inclinación Zig-Zag. b) \*\*Aplicación de las fuerzas. c) \*\*Inclinación en un devanado.

**Fuente:** \*MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 105.

\*\*ROSENTINO, Jr. Arnaldo José, et al. *Modelling and Analysis of Electromechanical Stress in Transformers Caused by Short-Circuits*. En: *Renewable Energy and Power Quality Journal* (2011). ISSN: 2172-038 X. p. 433.

Existen dos fuerzas que se oponen a la inclinación de los conductores. La primera es debida al material del conductor, que se resiste a la torsión, y la segunda es debida a la fricción en los bordes del conductor, ya que durante la inclinación el conductor introduce sus bordes en el separador radial produciendo un par que se resiste a la inclinación<sup>35</sup>.

Las fuerzas críticas de torsión y fricción se pueden obtener por separado a partir de las siguientes expresiones:

$$F_{cr\_twist} = \frac{N \cdot \pi \cdot E \cdot t \cdot w^2}{6 \cdot R} \quad (11)$$

$$F_{cr\_fric} = \frac{N_b \cdot N \cdot b \cdot c \cdot t^3}{6 \cdot w} \quad (12)$$

<sup>34</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 103.

<sup>35</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 274.

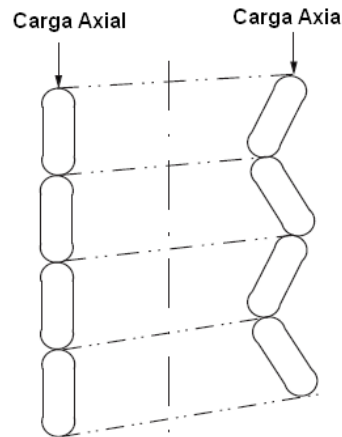
Dónde:

$R$  radio medio del devanado,  $w$  altura del conductor en la dirección axial,  $t$  espesor radial del conductor,  $E$  módulo de elasticidad del material del conductor,  $N$  número de vueltas del devanado,  $N_b$  número de espaciadores radiales,  $b$  ancho de los espaciadores,  $c$  constante que depende del material del espaciador.

La carga crítica total sería igual a la suma de las dos cargas anteriores.

En un devanado en capas, se puede presentar una falla con patrón en zig-zag sobre una capa solamente como se muestra en la Figura 13. Incluso puede ocurrir en un devanado de disco cuando se alcance una tensión cerca de 10% menos de la tensión total de inclinación<sup>36</sup>.

Figura 13. Media inclinación en un devanado de capas.



**Fuente:** KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 275.

En este caso la fuerza crítica para devanados en capa y hélice están dadas por las siguientes formulas respectivamente.

$$F_{cr} = \frac{\pi \cdot (3 \cdot E \cdot I + G \cdot I_p)}{2 \cdot R \cdot w} \quad (13)$$

$$F_{cr} = \frac{\pi \cdot (3 \cdot E \cdot I + G \cdot I_p)}{2 \cdot R \cdot w} + \frac{N_b \cdot b \cdot c \cdot t^3}{6 \cdot w} \quad (14)$$

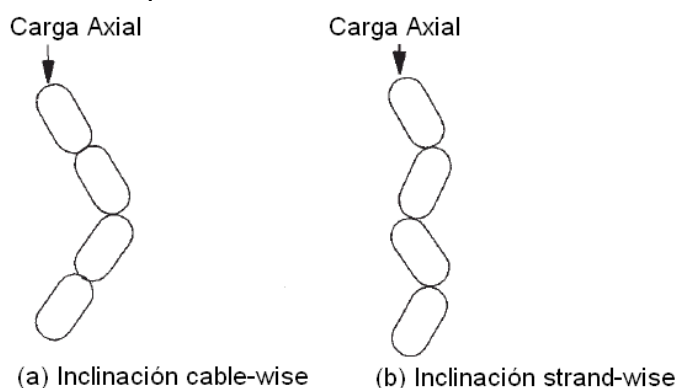
Dónde:

$I$  es el momento de inercia de área,  $I_p$  es el momento de inercia polar y  $G$  es el módulo de elasticidad transversal.

<sup>36</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 275.

Cuando se usa un cable continuamente transpuesto (CTC), aunque hay dos filas de conductores situadas axialmente en una cubierta de papel, no se puede asumir que la fuerza de inclinación efectiva es mayor. En este caso se describen dos posibles modos de falla. El primero (denominado como inclinación cable-wise), en el cual dos cables adyacentes se inclinan uno contra el otro, Figura 14 (a). El segundo modo de falla (denominado como inclinación strand-wise), dos hilos situados axialmente en el conductor transpuesto se inclinan uno contra el otro, Figura 14 (b)<sup>37</sup>. En cualquiera de los casos, el patrón de deformación es el mismo en todos los hilos del cable, excepto para el escalonamiento de acuerdo con el punto de transposición<sup>38</sup>.

Figura 14. Inclinación en capas de devanados con CTC.



**Fuente:** KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 276.

El modo cable-wise ocurre cuando la fricción entre hilos es alta, así el devanado es forzado a inclinarse en pares de hilos en el CTC. La tensión axial crítica para esta inclinación es:

$$\sigma_{cr\_tiwst} = \frac{E \cdot (w_1)^2}{3 \cdot R^2} \quad (15)$$

Dónde:

$w_1$  es la altura de un hilo individual.

En el modo de falla strand-wise, la fuerza axial crítica está determinada por:

$$F_{cr} = \frac{8 \cdot G \cdot I_p}{w_1 \cdot l_c} + \frac{2 \cdot E \cdot I \cdot l_c}{3 \cdot R^2 \cdot w_1} + \frac{E \cdot I \cdot (L - 2 \cdot l_c)}{R^2 \cdot w_1} \quad (16)$$

<sup>37</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 276.

<sup>38</sup> PATEL, Mukund R. Instability of the continuously transposed cable under axial short-circuit forces in transformers. En: IEEE Transactions on Power Delivery. p. 151.

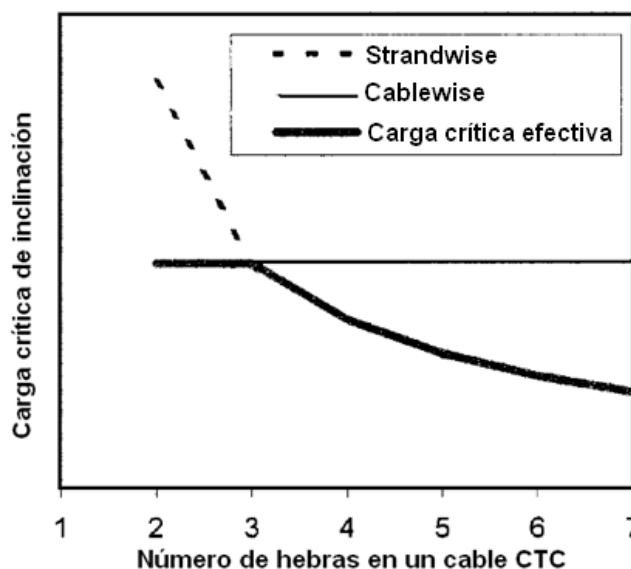
Dónde:

$l_c$  es la distancia en la cual un hilo es transpuesta de una posición a otra, es igual a  $L/n$ , con  $n$  como el número de hilos.

La tensión efectiva del devanado se ve reducida hasta el valor menor entre las dos tensiones obtenidas en los dos modos de falla. El fallo ocurre porque la menor tensión crítica es sobrepasada por la tensión real del devanado.

Mientras que la tensión crítica en la inclinación cablewise es independiente del número de hilos en el cable, la tensión crítica en la inclinación strandwise es inversamente proporcional a  $n$ . A medida que el número de hilos aumenta en el CTC, el límite de carga crítica en la inclinación strandwise se hace menor que la inclinación cablewise, como se indica en la Figura 15. Por lo tanto, con el aumento en el número de hilos se produce un cambio del fallo de cablewise al strandwise<sup>39</sup>.

Figura 15. Fuerza de inclinación crítica frente al número de hilos en el CTC.



**Fuente:** PATEL, Mukund R. *Instability of the continuously transposed cable under axial short-circuit forces in transformers.* En: IEEE Transactions on Power Delivery. p. 153.

El uso de un CTC cubierto en epoxi, en el que el recubrimiento une eficazmente los hilos, aumenta la resistencia contra la inclinación strandwise. Después del curado, el conductor CTC que consta de muchos hilos puede ser considerado un conductor con una sección transversal equivalente para la consideración de la resistencia mecánica. Por lo tanto, la posibilidad de inclinación strandwise se

<sup>39</sup> PATEL, Mukund R. *Instability of the continuously transposed cable under axial short-circuit forces in transformers.* En: IEEE Transactions on Power Delivery. p. 153.



elimina, lo que aumenta enormemente la resistencia del conductor de CTC en contra de la carga de inclinación<sup>40</sup>.

### 1.2.3 Fallos debidos a la acción combinada de las fuerzas

Este tipo de fallos se presenta en devanados helicoidales, donde ocurre un fenómeno llamado espiral. En este fenómeno se produce un cambio tangencial de las espiras externas en los devanados de tipo helicoidal como se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Espiral en devanados helicoidales.



**Fuente:** FOGELBERG, Thomas. Short-Circuit Withstand Capability of Power Transformers. En: ABB Review- Transformers and Substations. 2008, no. 1, p. 27.

En los devanados helicoidales se presentan dos tipos de corrientes, una circunferencial y la otra axial, y es debido a estas componentes y su interacción con las densidades de flujo de campo radial y axial que se produce una fuerza electromagnética de torsión.

Matemáticamente se puede describir el problema de la siguiente manera, siendo la densidad de corriente y la densidad de flujo magnético iguales a:

$$\vec{J} = J_{\phi} \cdot \vec{a}_{\phi} + J_z \cdot \vec{a}_z \quad (17)$$

$$\vec{B} = B_r \cdot \vec{a}_r + B_z \cdot \vec{a}_z \quad (18)$$

La fuerza se compondría por:

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = J_{\phi} \cdot B_z \cdot \vec{a}_r + J_z \cdot B_r \cdot \vec{a}_{\phi} - J_{\phi} \cdot B_{\phi} \cdot \vec{a}_z \quad (19)$$

<sup>40</sup> KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. 2 Ed. CRC Press 2012. p. 277.

Donde el primer término de la derecha se refiere a la componente radial de la fuerza, el término del medio representa la fuerza de torsión, ya que actúa en la dirección circular, y el término de la izquierda corresponde a la fuerza axial.

Adicionalmente se puede dividir el problema en tres partes, el extremo superior e inferior del devanado y su porción media. A lo largo del devanado se puede considerar constante la componente axial de la corriente, pero en los extremos se presenta una mayor concentración de la componente radial del flujo de dispersión en comparación con la parte central del devanado, lo que indica una mayor fuerza de torsión en los extremos respecto a la sección media. A lo anterior debe sumarse el movimiento relativo de los dos extremos que ocurre en direcciones opuestas, facilitando de esta manera la aparición del fenómeno de espiral.

#### 1.2.4 Otros tipos de fallos

Durante una condición de cortocircuito, ocurren simultáneamente la vibración mecánica de los devanados y la expansión térmica de los conductores. Los desplazamientos relativos entre el aislamiento de los cables y otras partes del devanado pueden dañar el aislamiento, esto puede conllevar a fallas internas. Daños similares pueden resultar a partir del desplazamiento de conexiones de las barras de alta corriente o por problemas que ocurren en el mecanismo de conmutación.

Estos peligros se pueden evitar por el dimensionamiento adecuado de los devanados tanto térmica como dinámicamente, y por la pre-compresión del sistema de bobinados con una fuerza correspondiente a los efectos electrodinámicos de cortocircuito, determinada durante la etapa de diseño del transformador, y sujeciones firmes para las componentes portadoras de corriente<sup>41</sup>.

Desafortunadamente, la presión de sujeción no permanece constante durante la vida útil del transformador. La razón principal de su disminución es la degradación y la disminución del aislamiento principal. Esto también es válido para las otras estructuras orgánicas en el interior del tanque, tales como papel, cartón prensado y apoyos de los conductores. Otros factores son el daño durante el transporte, ciclos térmicos repetidos, vibraciones operacionales o fuerzas mecánicas durante

<sup>41</sup> KARSAI, Károly; KERÉNYI, Dénes y KISS, László. Large Power Transformers. (Studies in Electrical and Electronic Engineering, Vol 25), Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987. p. 121.

la corriente inrush, un procedimiento de secado demasiado intensivo, etc. Todos estos factores pueden conducir a una reducción en la presión de sujeción constructiva del transformador. <sup>42</sup>.

En el siguiente capítulo se comentará acerca del cálculo de las corrientes de cortocircuito y los métodos utilizados para cuantificar las fuerzas que se producen en los devanados del transformador durante una condición de cortocircuito.

---

<sup>42</sup> KRAETGE, Alexander. Diagnosis of the short circuit duty of power transformers. En: Diagnostic Measurements on Power Transformers OMICRON, 2006. p. 1.

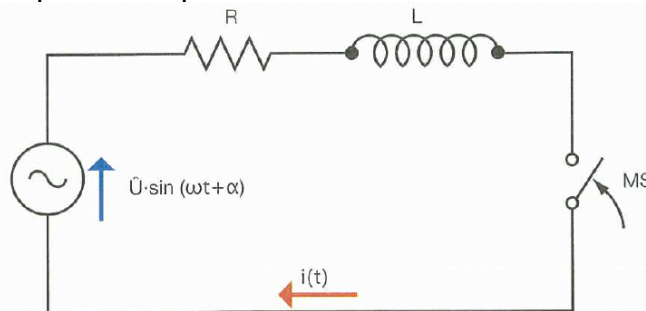
## 2. PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE LA CORRIENTE Y FUERZAS DE CORTOCIRCUITO

Para el cálculo de la corriente presente durante una condición de cortocircuito, no se requieren métodos complejos ni tratamientos especiales, se inicia su estudio describiendo el comportamiento transitorio y posteriormente se calcula su magnitud.

### 2.1 NATURALEZA DE LA CORRIENTE DE CORTOCIRCUITO

Para el cálculo de la corriente de cortocircuito en un sistema eléctrico, este se puede modelar considerando el circuito de la Figura 17 el cual contiene una fuente de tensión alterna  $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$ , un interruptor  $MS$  y una resistencia  $R$  en serie con una inductancia  $L$ .

Figura 17. Circuito equivalente para el análisis de cortocircuito.



**Fuente:** BERTAGNOLLI, Giorgio. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 26.

Suponiendo que se opera el interruptor  $MS$  en el instante  $t = 0$ , simulando un cortocircuito, la corriente resultante  $i(t)$  se expresa por la siguiente ecuación:

$$i(t) = \hat{I} \cdot (\sin(\omega \cdot t + \alpha - \varphi) - e^{-t/\tau} \cdot \sin(\alpha - \varphi)) \quad (20)$$

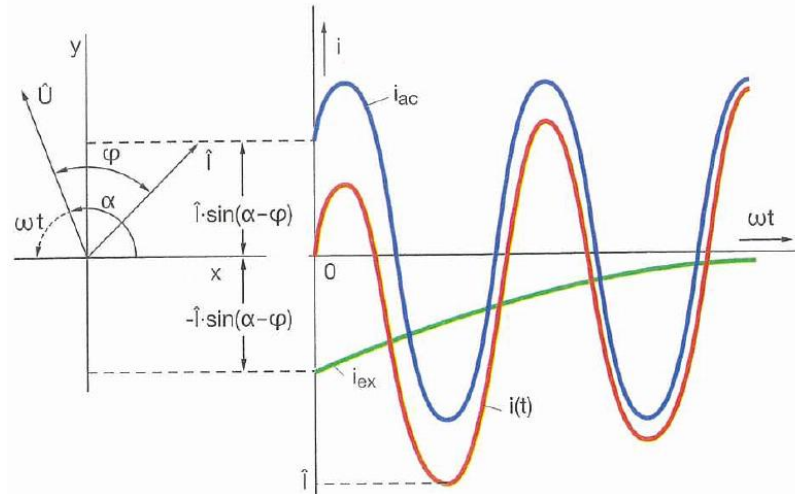
Dónde:

$\hat{I}$  es la amplitud de la corriente,  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular,  $\alpha$  es el ángulo de conmutación de la tensión  $u(t)$  en el instante  $t=0$ ,  $\varphi = \tan^{-1}(\omega \cdot L/R)$  es el ángulo de fase de la impedancia del circuito,  $\tau$  es la constante de tiempo del circuito.

La corriente antes de cerrar el interruptor  $MS$  es cero, cuando se cierra  $MS$  la corriente aumenta desde cero, como se observa en la Figura 18. La corriente de cortocircuito consta de dos componentes:

- Una componente  $i_{ac}$  de estado estacionario alterna a la frecuencia fundamental llamada corriente de cortocircuito simétrica.
- Una componente  $i_{ex}$  transitoria unidireccional que disminuye de manera exponencial con el tiempo.

Figura 18. Corriente de cortocircuito  $i(t)$  en un sistema eléctrico.



**Fuente:** BERTAGNOLLI, Giorgio. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 27.

En casi todos los casos la corriente  $i(t)$  alcanza su mayor amplitud en el primer pico cuando  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = \pi$ , es decir, cuando el cortocircuito ocurre en el cruce por cero de la tensión. En los sistemas eléctricos, la reactancia del circuito prevalece en gran medida sobre la resistencia<sup>43, 44</sup>. Por lo tanto se puede asumir que la corriente de cortocircuito queda definida por la siguiente expresión:

$$i(t) = \hat{I} \cdot (\sin(\omega \cdot t - \pi/2) + e^{-t/\tau}) \quad (21)$$

La magnitud del primer pico de corriente puede calcularse como:

$$i = \hat{I} \cdot k = I_{sc} \cdot \sqrt{2} \cdot k \quad (22)$$

Dónde:

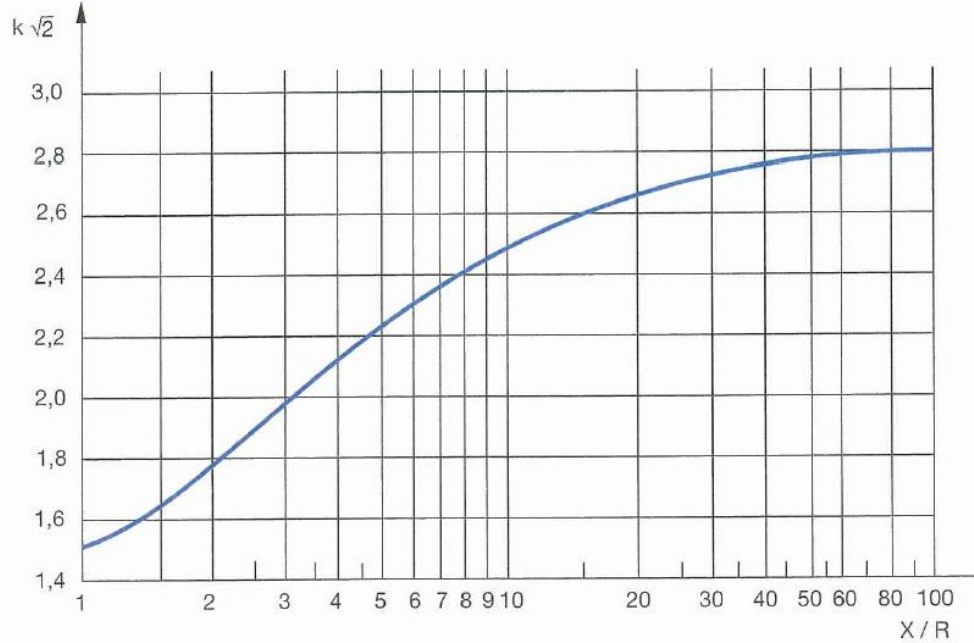
$I_{sc}$  es la corriente de cortocircuito simétrica (valor R.M.S.),  $k = 1 + e^{-\pi \cdot R/X}$ ;  $R$  es la resistencia del circuito,  $X$  es la reactancia del circuito.

<sup>43</sup> BERTAGNOLLI, G. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 26.

<sup>44</sup> KARSAL, Károly; KERÉNYI, Dénes y KISS, László. *Large Power Transformers*. (Studies in Electrical and Electronic Engineering, Vol 25), Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987. p. 125.

Puede nombrarse el factor  $k$  como factor de asimetría, y al factor  $\sqrt{2} \cdot k$  como factor de pico. Este último varía con la relación  $X/R$  como se indica en la Figura 19.

Figura 19. Factor de pico de la corriente de cortocircuito en función de la relación  $X/R$ .



**Fuente:** BERTAGNOLLI, Giorgio. *Short-Circuit Duty of Power Transformers*. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. p. 28.

### 2.1.1 Cálculo de la magnitud de la corriente de cortocircuito.

En el caso de un transformador trifásico de dos devanados, alimentado por una fuente de potencia infinita, el valor R.M.S. de la corriente de cortocircuito simétrica  $I_{sc}$  es expresada por:

$$I_{sc} = \frac{U}{Z \cdot \sqrt{3}} \quad (23)$$

Dónde:

$U$  es la tensión fase- fase y  $Z$  es la magnitud de la impedancia de cortocircuito del transformador.

También se puede calcular la corriente usando la notación por unidad:

$$I_{sc} = \frac{I_r}{z} \quad (24)$$

Dónde:

$z$  es la impedancia de cortocircuito en  $pu$ ,  $I_r$  es la corriente nominal del transformador.

En una condición real donde la capacidad del sistema no es infinita, se debe tener en cuenta la impedancia de cortocircuito equivalente del sistema en el punto de instalación. Considerando esto la magnitud de la corriente de cortocircuito se determina de acuerdo a la siguiente expresión:

$$I_{sc} = \frac{U}{(Z + Z_s) \cdot \sqrt{3}} \quad (25)$$

Dónde:

$Z_s = U_s^2 / S$  es la impedancia de cortocircuito del sistema,  $U_s$  es la tensión nominal del sistema,  $S$  es la potencia aparente de corto circuito del sistema.

Utilizando la notación porcentual, la ecuación (24) se convierte en:

$$I_{sc} = \frac{100}{z + z_s} \cdot I_r = r \cdot I_r \quad (26)$$

Dónde:

$z_s = 100 \cdot S_r / S$  es la impedancia de cortocircuito del sistema,  $S_r$  es la potencia nominal del transformador.

La cantidad  $100/(z + z_s)$  o, en su caso,  $100/z$  se conoce como el "factor de sobre-corriente,  $r$ ".

Para transformadores conectados en estrella (Y), la corriente de cortocircuito es igual a la calculada con la ecuación (26), para devanados con conexión en delta ( $\Delta$ ) la corriente de cortocircuito que circula en el devanado es igual a  $I_{sc}/\sqrt{3}$ <sup>45</sup>.

## 2.2 PRINCIPIOS DEL CÁLCULO DE LAS FUERZAS

Es habitual que el cálculo de la fuerza en algún punto se realice en dos componentes, el problema está en calcular la componente de la densidad de flujo de dispersión en la dirección axial y en la dirección radial. Ambas componentes están en ángulo recto con respecto a los conductores, y la magnitud de la fuerza

<sup>45</sup> MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966. p. 9.

se determinaría como el producto entre la densidad de flujo y la corriente en el conductor.

En un transformador tipo núcleo con devanados concéntricos, el eje del campo de la componente radial de la densidad de flujo de dispersión puede ser imaginado semejante a los radios de una rueda con la periferia como el conductor. En un transformador de tipo acorazado con lados de la bobina rectos se utilizan las mismas dos componentes, originando fuerzas en ángulo recto con el conductor, una saliendo de la frontera de hierro y la otra paralela a ella<sup>47</sup>.

A continuación se estudiarán los métodos aproximados los cuales permiten calcular los esfuerzos de cortocircuito, estos métodos se basan en transformadores tipo núcleo.

### 2.2.1 Métodos Aproximados

Estos métodos de cálculo de asumen ciertas simplificaciones las cuales se describen a continuación:<sup>46</sup>:

- Los conductores están enrollados uno sobre el otro radialmente y por lo tanto las fuerzas de cortocircuito radiales actúan sobre la circunferencia media de los devanados.
- La presencia de conductos de refrigeración axiales puede dar lugar a errores en los cálculos de las fuerzas de cortocircuito que son ignorados en algunas fórmulas analíticas.
- La posición del tanque hace que el patrón de flujo de dispersión cambie, lo que se ignora de nuevo en la fórmula analítica.
- La parte de los bobinados bajo el yugo tiene un patrón de campo de fuga diferente en comparación con la parte exterior de la ventana. Este fenómeno se ignora en la fórmula analítica.

Los métodos aproximados para el cálculo de esfuerzos de cortocircuito son: la ley de Biot Savart y el método de Ampere-vuelta residual.

<sup>46</sup> AHMAD, Ashfaq; JAVED, Iqra y NAZAR, Waseem. Short Circuit Stress Calculation in Power Transformer Using Finite Element Method on High Voltage Winding Displaced Vertically. p. 301.



### 2.2.1.1 Ley de Biot-Savart

Se usa la ley de Biot-Savart como método de cálculo de la componente de densidad de flujo axial para todo el sistema de conductores, ya que el hierro tiene poca o ninguna influencia para esta componente y los dos devanados con el conducto de fuga entre ellos se aproximan a un solenoide largo, cuyas propiedades son bien conocidas, de cálculo fácil y preciso. La presencia del núcleo de hierro hace que se dificulte su aplicación para el cálculo de la componente radial<sup>47</sup>. La máxima densidad de flujo magnético está determinada por la siguiente expresión:

$$B_{\max} = \frac{\mu_o \cdot \sqrt{2} \cdot N \cdot I}{H_w} \quad (27)$$

Donde  $\mu_o$  es la permeabilidad del vacío,  $N$  es el número de espiras,  $I$  valor de la corriente R.M.S. del devanado,  $H_w$  es la altura media del devanado.

Utilizando la ley de Biot-Savart se determina la densidad de flujo magnético producida por el devanado, luego se calcula el producto de esta densidad por la corriente en los devanados obteniendo la fuerza que actúa sobre él. La ley de Biot-Savart es un método sencillo que da al diseñador un panorama general sobre los esfuerzos radiales máximos que se presentan en los devanados.

### 2.2.1.2 Ampere-Vuelta residual

La componente axial del flujo de dispersión por lo general se puede calcular con precisión por la ley de Biot-Savart. La componente radial puede ser calculada a través de un método en el que los amperes-vueltas de cualquier disposición de devanados se dividen en dos componentes, cada una compuesta de un sistema equilibrado de ampere-vuelta positivo y negativo, uno actuando axialmente y el otro de forma radial. Este método que se conoce como el método de ampere-vuelta residual, es muy útil para el cálculo aproximado de las fuerzas axiales<sup>48</sup>.

Los ampere-vuelta radiales que actúan en cualquier punto en el devanado se calculan tomando la suma algebraica de los ampere-vueltas del primario y del secundario entre el punto y cualquiera de los extremos de los devanados. Una curva trazada para todos los puntos es un diagrama de ampere-vuelta residual o desequilibrado. Es claro que para devanados sin derivaciones, de igual longitud y sin desplazamiento no hay ampere-vuelta residuales y no hay fuerzas axiales entre bobinados, aunque hay fuerzas de compresión internas en ambos

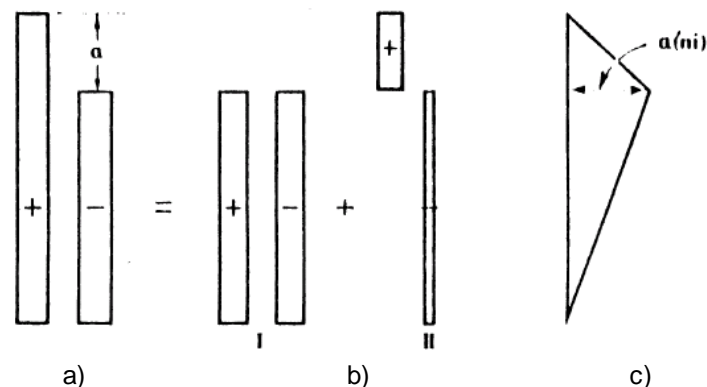
<sup>47</sup> MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966. p. 23.

<sup>48</sup> Ibid. p. 24.

devanados<sup>49</sup>. En la Figura 20 se muestra como se construye un diagrama de ampere-vuelta residual.

Las dos disposiciones I y II de la Figura 20 (b) son ambos grupos equilibrados de amperes-vueltas, que cuando se superponen producen la distribución dada de los bobinados. El diagrama que muestra los amperes-vueltas radiales representa al frente la distancia a lo largo de los devanados como un triángulo mostrado en la Figura 20 (c) que tiene un valor máximo de  $a(ni)$  donde  $(ni)$  representa los ampere-vuelta del devanado primario o del secundario. Esto se considera que es una aproximación y se hace principalmente para obtener un resultado sencillo. Sin embargo, las pruebas muestran que esta aproximación es razonablemente precisa y que el flujo magnético en realidad sigue una curva de distribución triangular de la misma forma que la curva de ampere-vuelta residual<sup>49</sup>.

Figura 20. Determinación del diagrama de ampere-vuelta residual para un devanado con derivaciones en un extremo.

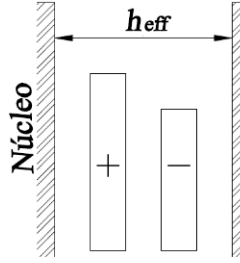


**Fuente:** MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 34.

Para el cálculo de la fuerza, se supone que los conductores están en una ranura anular, a un lado de ella está la superficie del núcleo y en la otra un límite imaginario a una distancia  $h_{eff}$  que es la longitud efectiva de la trayectoria para la componente radial de flujo, como se observa en la Figura 21. Se elige  $h_{eff}$  para dar la densidad de flujo en el diámetro medio del transformador.

<sup>49</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 34.

Figura 21. Configuración asumida para el cálculo del flujo radial.



**Fuente:** MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. pp 35.

Se calcula la densidad media de flujo radial en el diámetro medio del transformador  $B_r$  desde el valor medio de los amperes-vueltas radiales  $a(ni)/2$  a continuación:

$$B_r = \frac{4 \cdot \pi \cdot a \cdot (ni)}{10 \cdot 2 \cdot h_{eff}} \quad [\text{G}] \quad (28)$$

Y la fuerza axial sobre cada devanado es:

$$F_A = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot (ni)^2}{10^{11}} \cdot \frac{\pi \cdot D_m}{h_{eff}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot (ni)^2}{10^{11}} \cdot \Lambda \quad [\text{t}] \quad (29)$$

Dónde  $D_m$  es el diámetro medio de la bobina del transformador.

La variación de la fuerza con la potencia del transformador se tiene en cuenta por el primer factor de la ecuación (29). El segundo factor de esta expresión es la permeabilidad por unidad de longitud de la columna para el flujo radial referida al diámetro medio del transformador,  $\Lambda = \pi D_m / h_{eff}$ . Este factor es independiente del tamaño físico del transformador y sólo depende de la configuración del núcleo y los devanados. El principal problema es determinar esta permeabilidad en cada caso<sup>50</sup>.

Este método es aplicable para cualquier disposición de las derivaciones; determinando primero los amperes-vueltas se construye el diagrama de amperes-vueltas residual, y con el valor apropiado de  $\Lambda$  se obtiene la fuerza axial sobre la parte de cualquier devanado en cada caso del diagrama de ampere-vuelta residual.

<sup>50</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 36.

El valor de  $\Lambda$  utilizado en cada caso fue estudiado empíricamente, estos se determinaron utilizando dos transformadores especialmente diseñados para tener valores muy diferentes de la relación (altura de la ventana) / (diámetro del círculo central) y permitir la medición del flujo magnético radial. Se definió que los factores de diseño como el ancho del conducto, el espacio libre entre el devanado y el núcleo, la proximidad del tanque, el grosor radial de los bobinados, todos tienen un efecto sobre  $\Lambda$ , pero el efecto es pequeño<sup>51</sup>. En casos extremos donde hay conductos muy anchos la exactitud disminuye. En la Tabla 1 se muestran los valores de  $\Lambda$  para varios arreglos de las derivaciones y la formula que se usaría para el cálculo de la fuerza.

Tabla 1. Valores de  $\Lambda$  para diferentes configuraciones de las derivaciones de los devanados.

Arreglo de los devanados	Diagrama de ampere-vuelta residual	Fuerza [t]	$\Lambda$ ( $\frac{\text{Altura ventana}}{\text{Circunferencia núcleo}} = 4,2$ )	$\Lambda$ ( $\frac{\text{Altura ventana}}{\text{Circunferencia núcleo}} = 2,3$ )
		$\frac{2\pi a(ni)^2 \Lambda}{10^{11}}$	5,5	6,4
		$\frac{\pi a(ni)^2 \Lambda}{2 * 10^{11}}$	5,8	6,6
		$\frac{\pi a(ni)^2 \Lambda}{4 * \left(1 - \frac{a}{2}\right) 10^{11}}$	5,8	6,6
		$\frac{\pi a(ni)^2 \Lambda}{8 * 10^{11}}$	6,0	6,8
		$\frac{\pi a(ni)^2 \Lambda}{16 * \left(1 - \frac{a}{2}\right) 10^{11}}$	6,0	6,8

Fuente: MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 38-39.

Este método permite el cálculo de los esfuerzos para diferentes arreglos de las derivaciones del devanado. Es adecuado para situaciones donde no se requiere tanta rigurosidad, por ser una herramienta practica que indica rápidamente si una disposición presenta mayores esfuerzos que otra, pero no es muy precisa para arreglos especiales de los devanados<sup>52</sup>.

<sup>51</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 38.

<sup>52</sup> Ibid. p. 33.

## 2.2.2 Métodos Sofisticados

Los siguientes métodos permiten calcular la fuerza en varias partes del devanado, estos implican solucionar ecuaciones integrales o series de Fourier.

### 2.2.2.1 Método de Roth

Se trabaja con el transformador representado en dos dimensiones y se hace uso del método de las imágenes, donde los devanados se consideran barras rectas rectangulares infinitamente largas que tienen las mismas secciones transversales de los devanados reales y con distribución de corriente uniforme, situadas en una ranura de hierro cerrada tal como se muestra en la Figura 22, representando la ventana del transformador, todos los cuatro límites han sido asumidos infinitamente permeables.

Esta región rectangular contiene una disposición de un número  $q$  de conductores rectangulares que llevan corriente. Basado en el método de las imágenes, un número infinito de imágenes, tanto en las direcciones  $x$  e  $y$  son hechas por los  $q$  conductores.<sup>53</sup>

La fuerza sobre el conjunto de bobinado se obtiene tomando una longitud de la barra igual a la longitud media de la vuelta del devanado. Esta disposición es una aproximación cercana a las porciones rectas de bobinado en un transformador de tipo acorazado, pero no es una representación muy exacta de un transformador de tipo núcleo<sup>54</sup>.

Considerando  $A$  como el potencial vectorial magnético en cualquier punto dentro de la ranura, las ecuaciones diferenciales que regulan el campo son resueltas en dos dimensiones en coordenadas rectangulares como sigue:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (30)$$

Para el espacio entre los devanados y:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu_0 \cdot J \quad (31)$$

<sup>53</sup> BASHIR, Mahdi Ebrahimi, et al. Analytical estimation of short circuit axial and radial forces on power transformers windings. En: IET Generation, Transmission & Distribution. 2014, Vol. 8, Iss. 2, p. 255.

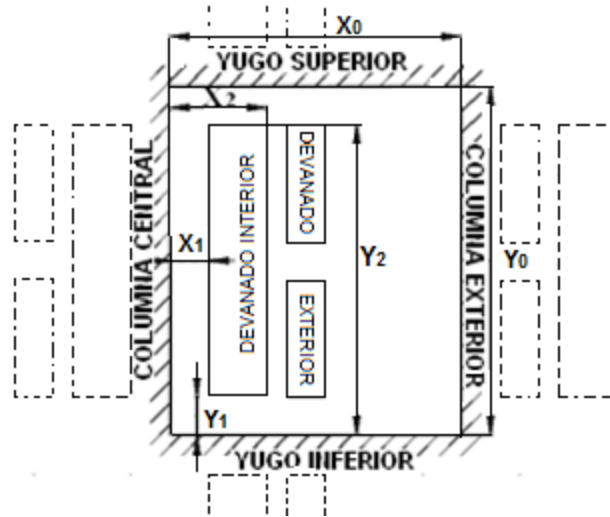
<sup>54</sup> MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966, p. 56.

Para las secciones transversales de los arrollamientos, en el que  $J$  es la densidad de corriente. Esta densidad de corriente se calcula utilizando la fuerza magnetomotriz del arrollamiento y el área efectiva como indica la ecuación (32).

$$J_j = \frac{N_j \cdot I_j}{(w'_j - w_j) \cdot (h'_j - h_j)} \quad (32)$$

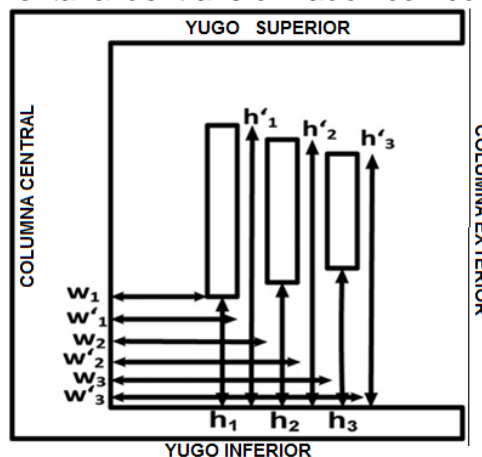
Donde  $N_j$  es el número de vueltas de la bobina (alta o baja),  $I_j$  es la corriente que pasa por estas bobinas,  $w_j$ ,  $h_j$ ,  $w'_j$  y  $h'_j$  son las dimensiones que se muestran en la Figura 23.

Figura 22. Representación en dos dimensiones de la ventana de un transformador.



**Fuente:** MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 56.

Figura 23. Región de la ventana del transformador con conductores.



**Fuente:** BASHIR, Mahdi Ebrahimi, et al. *Analytical estimation of short circuit axial and radial forces on power transformers windings*. En: *IET Generation, Transmission & Distribution*. 2014, Vol. 8, Iss. 2, p. 255.

Las soluciones de las ecuaciones (30) y (31) pueden expresarse en una serie doble de Fourier, siendo las constantes determinadas por las posiciones de los límites de hierro; el número, la posición y las dimensiones de los devanados<sup>55</sup>.

El potencial vectorial magnético se estima como sigue:

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \cdot \cos(M_m \cdot x) \cdot \cos(N_n \cdot y) \quad (33)$$

Dónde  $M_m = (m-1) \cdot \pi / w$ ,  $N_n = (n-1) / h$ , con  $w$  como el ancho de la ventana y  $h$  el alto de la ventana del transformador.

Esta fórmula será la verdadera solución del campo magnético si cumple con la ecuación de Poisson (31) y de Laplace (30). Mediante la aplicación de estas condiciones, se determinan las constantes  $C_{m,n}$ . Conociendo el potencial vectorial magnético se calcula la densidad de flujo de campo magnético usando la siguiente ecuación:

$$B_{(x,y)} = \nabla \times A_{(x,y)} \quad (34)$$

Por último, se calculan las fuerzas totales axiales y radiales como el producto de la densidad de corriente y las componentes de  $B$ , obteniendo:

$$F_{rj} = -J_j \sum_{h=h_j}^{h=h'_j} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \cdot \frac{(\cos(M_m \cdot w'_j) - \cos(M_m \cdot w_j)) \cdot (\sin(N_n \cdot h'_j) - \sin(N_n \cdot h_j))}{N_n} \quad (35 \text{ a})$$

$$F_{rj} = J_j \sum_{h=h_j}^{h=h'_j} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \cdot \frac{(\sin(M_m \cdot w'_j) - \sin(M_m \cdot w_j)) \cdot (\cos(N_n \cdot h'_j) - \cos(N_n \cdot h_j))}{M_m} \quad (35 \text{ b})$$

#### 2.2.2.2 Método de Rabins

Se trabaja con un transformador idealizado con simetría axial considerando el problema en dos dimensiones. El núcleo se supone que es de forma cilíndrica y los yugos se representan por planos infinitos, ambos tienen permeabilidad infinita. Los devanados son coaxiales con la columna del núcleo y de sección transversal

<sup>55</sup> MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966. p. 57.

rectangular con densidad de corriente uniforme, si un bobinado tiene partes de diferente densidad de corriente se deben de tratar como devanados separados. Los bobinados con tomas pueden ser tratados mediante el uso de una representación escalonada, cada paso se trata como un bobinado separado<sup>56</sup>.

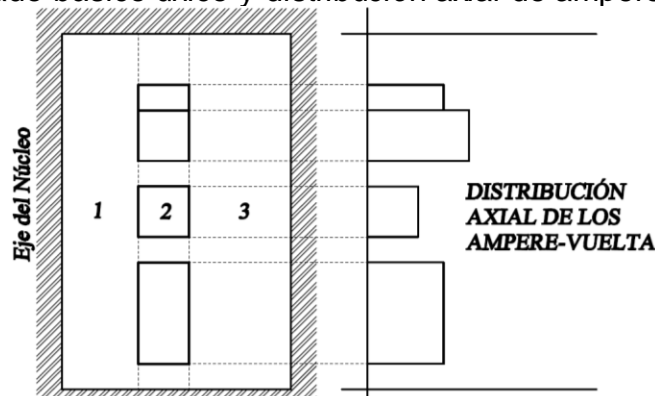
En este método se resuelve la ecuación de Poisson y de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 \cdot J_\varphi \quad (36 a)$$

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (36 b)$$

Se considera un único devanado de sección transversal rectangular, como se muestra en la Figura 24, como no se consideran efectos no lineales, se puede sumar el efecto de cada devanado estudiado de manera individual. La variación en los ampere-vuelta por unidad de longitud axial se tiene en cuenta al considerar el devanado compuesto de una serie de secciones, cada una con densidad de ampere-vuelta uniforme, es necesario, por supuesto, saber los ampere-vuelta por unidad de longitud de cada sección y su posición. Para indicar esta distribución axial de los ampere-vuelta se utiliza una serie simple de Fourier con coeficientes que son funciones de Bessel y Struve.

Figura 24. Devanado básico único y distribución axial de ampere-vuelta.



**Fuente:** MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 62.

El problema se divide en tres zonas de las que es posible obtener expresiones para el potencial vectorial magnético. La primera zona es el espacio entre el bobinado y el núcleo (1 en la Figura 24), la segunda zona es la sección transversal

<sup>56</sup> MALCOLM, Waters. *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*. London: MacDonald, 1966. p. 58.



del devanado que incluye las áreas entre los extremos y los yugos (2 en la Figura 24), y el tercero es el espacio entre el bobinado y el contorno cilíndrico exterior (3 en la Figura 24). Cualquier hueco en el bobinado y los espacios libres entre los bobinados y yugos se tratan como secciones de bobinado pero con ampere-vuelta igual a cero. Las siguientes ecuaciones muestran la solución del potencial vectorial magnético para las tres regiones<sup>57</sup>:

$$A^I = \frac{\mu_0 J_0 (r_2 - r_1)}{2} r + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{m^2} [C_n I_1(x) + D_n K_1(x)] \cos(mz) \quad (37 a)$$

$$A^{II} = \mu_0 J_0 \left( \frac{r_2 r}{2} - \frac{r_1^3}{6r} - \frac{r^2}{3} \right) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{m^2} \left[ E_n I_1(x) + F_n K_1(x) - \frac{\pi}{2} L_1(x) \right] \cos mz \quad (37 b)$$

$$A^{III} = \frac{\mu_0 J_0 (r_2^3 - r_1^3)}{2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{m^2} G_n K_1(x) \cos(mz) \quad (37 c)$$

Los coeficientes  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$ ,  $F_n$  y  $G_n$ , son funciones integrales que tienen incluidas las funciones especiales de Bessel y de Struve. Se puede determinar el vector de densidad de flujo magnético  $B$  con la ecuación (34) y posteriormente calcular la fuerza.

En un transformador de dos devanados o de múltiples devanados la densidad de flujo magnético en cualquier punto se calcula por superposición, teniendo en cuenta el sentido de la corriente en cada devanado y la zona en la que el punto se encuentra. Por lo tanto un punto en el conducto de un transformador de dos devanados sería en la zona 3 del bobinado interior y en la zona 1 del bobinado exterior y un punto fuera de los dos devanados sería en la zona 3 para ambos devanados<sup>58</sup>.

Las principales dificultades que surgen en el uso de estas soluciones son; en primer lugar el cálculo de las funciones de Bessel y Struve, adicionalmente se pueden encontrar soluciones diferentes para un mismo caso, debido a estas funciones especiales<sup>59</sup>; en segundo lugar esta determinar cuándo las sumas han convergido lo suficiente, decidir cuando las sumas de la serie infinita se han llevado a cabo para un número suficiente de términos es una cuestión de cierta dificultad ya que las series no son rápidamente convergentes<sup>60</sup>.

<sup>57</sup> Del Vecchio, Robert M., et al. Transformer Design Principles - With Application to Core-Form Power Transformers. 2 Ed. CRC Press, 2010. p. 240-250.

<sup>58</sup> MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966. p. 62.

<sup>59</sup> Ibid. p. 61.

<sup>60</sup> Ibid. p. 63.

### 2.2.2.3 Función de Green

En este método se determina el potencial vectorial magnético del campo de dispersión en coordenadas rectangulares, y a partir de este se obtiene la densidad de flujo magnético como lo indica la ecuación (34). El vector  $A$  se calcula mediante la integración de la siguiente ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes lineales definidos sobre la superficie  $\Sigma$  de la ventana con las condiciones de Neumann especificadas en la frontera  $\Gamma$  para la superficie  $\Sigma$  (ver Figura 25):

$$\Delta A(x, y) = -\mu_0 * J(x, y) \quad (38)$$

Donde  $J(x, y)$  representa la densidad de corriente. La integración de (38) se lleva a cabo utilizando la fórmula de los tres potenciales, dando el vector de potencial:

$$A(x, y) = \int_{\Sigma} J(x_0, y_0) * G(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \frac{1}{\mu_0} * \int_{\Gamma} G(x, y; x_0, y_0) \frac{\partial A(x_0, y_0)}{\partial n} ds_0 + A_0 \quad (39)$$

Donde  $G(x, y; x_0, y_0)$  representa la función de Green correspondiente al operador de Laplace y las condiciones de frontera de Neumann, y  $A_0$  es una constante arbitraria, por simplicidad se considera generalmente nula. La función de Green se define por las siguientes relaciones:

$$\Delta G(x, y; x_0, y_0) = -\mu_0 * \delta(x - x_0) * \delta(y - y_0) \quad (40)$$

$$\partial G(x, y; x_0, y_0) / \partial n = -\mu_0 / l_{\Gamma} \quad (41)$$

Donde  $\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0)$  se llama función bidimensional de Dirac para coordenadas cartesianas y  $l_{\Gamma}$  es la longitud de la curva  $\Gamma$  mostrada en la Figura 25.

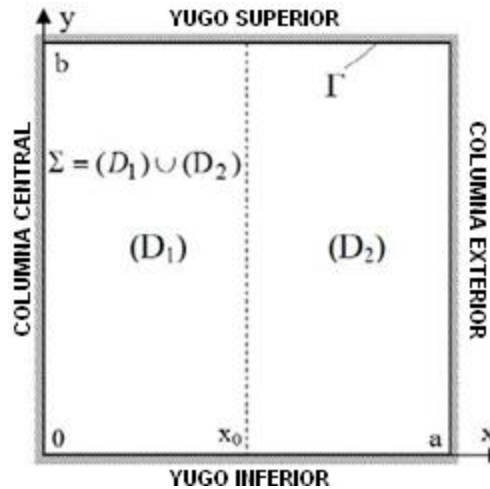
El campo magnético de fuga resultante dentro de la ventana  $B(x, y)$  se puede considerar que es generado por la superposición de dos campos. Uno definido en la hipótesis de la igualdad de fuerzas magneto-motrices en los devanados, indicado con  $B'(x, y)$ . El otro se define en la hipótesis de la existencia de una única fuerza magneto-motriz de magnetización, y se denota con  $B^*(x, y)$ . En consecuencia:

$$B(x, y) = B'(x, y) + B^*(x, y) \quad (42)$$

La solución de (40) con condiciones de contorno (41), cuando se consideran las fuerzas magneto-motrices equilibradas,  $B'(x, y)$ , en un transformador para los devanados de alta tensión y de baja tensión se trata de la siguiente manera. La superficie  $\Sigma$  se divide en cinco sub-dominios como se presenta en la Figura 26.

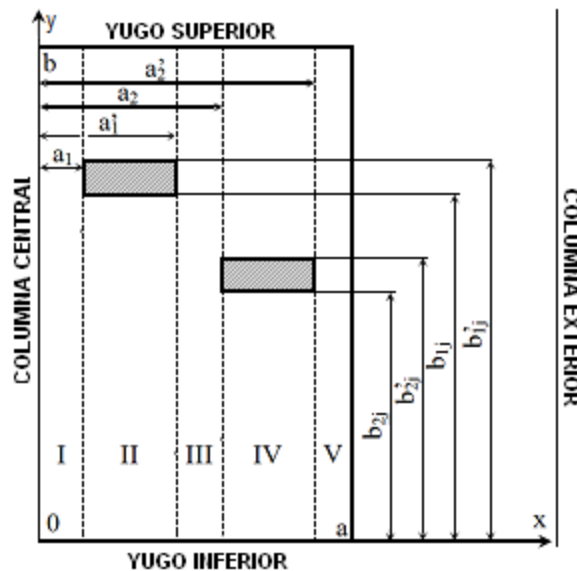
Las bobinas de alta y baja tensión tienen la misma dimensión radial  $a_1'-a_1$  y  $a_2'-a_2$  respectivamente, pero diferentes alturas  $b_1'-b_1$  y  $b_2'-b_2$  respectivamente, donde  $j$  es el orden de la bobina. Por simplicidad se considera el mismo número de bobinas para ambos devanados, denotado con  $l$ .

Figura 25. Ventana del transformador dividida en subdominios.



**Fuente:** DEACONU, Ioan-Dragoș, et al. *Analytical Computation Method For Electrodinamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings*. p. 146.

Figura 26. Bobinas de orden  $j$ , pertenecientes a los dos devanados del transformador.



**Fuente:** DEACONU, Ioan-Dragoș, et al. *Analytical Computation Method For Electrodinamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings*. p. 147.

Despreciando la fuerza magneto-motriz de magnetización se provoca la cancelación del campo magnético tangencial a la frontera  $\Gamma$ , y así (39) se convierte en:

$$A(x, y) = \int_{\Sigma} J(x_0, y_0) * G(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (43)$$

La ecuación (43) tendrá cinco expresiones diferentes, que corresponden a los cinco sub-dominios de la siguiente manera:

$$A_I'(x, y) \sum_{j=1}^l \left( \int_{a_1}^{a'_{1j}} \int_{b_{1j}}^{b'_{1j}} J_{1j} * G_1 dx_0 dy_0 + \int_{a_2}^{a'_{2j}} \int_{b_{2j}}^{b'_{2j}} J_{2j} * G_1 dx_0 dy_0 \right) \quad (44 a)$$

$$A_{II}'(x, y) \sum_{j=1}^l \left( \int_{a_1}^x \int_{b_{1j}}^{b'_{1j}} J_{1j} * G_2 dx_0 dy_0 + \int_x^{a'_1} \int_{b_{1j}}^{b'_{1j}} J_{1j} * G_1 dx_0 dy_0 \right) + \int_{a_2}^{a'_2} \int_{b_{2j}}^{b'_{2j}} J_{2j} * G_1 dx_0 dy_0 \quad (44 b)$$

$$A_{III}'(x, y) \sum_{j=1}^l \left( \int_{a_1}^{a'_{1j}} \int_{b_{1j}}^{b'_{1j}} J_{1j} * G_2 dx_0 dy_0 + \int_{a_2}^{a'_{2j}} \int_{b_{2j}}^{b'_{2j}} J_{2j} * G_1 dx_0 dy_0 \right) \quad (44 c)$$

$$A_{IV}'(x, y) \sum_{j=1}^l \left( \int_{a_1}^{a'_1} \int_{b_{1j}}^{b'_{1j}} J_{1j} * G_2 dx_0 dy_0 + \int_{a_2}^x \int_{b_{2j}}^{b'_{2j}} J_{2j} * G_2 dx_0 dy_0 \right) + \int_x^{a'_2} \int_{b_{2j}}^{b'_{2j}} J_{2j} * G_1 dx_0 dy_0 \quad (44 d)$$

$$A_V'(x, y) \sum_{j=1}^l \left( \int_{a_1}^{a'_1} \int_{b_{1j}}^{b'_{1j}} J_{1j} * G_2 dx_0 dy_0 + \int_{a_2}^{a'_2} \int_{b_{2j}}^{b'_{2j}} J_{2j} * G_2 dx_0 dy_0 \right) \quad (44 e)$$

Donde  $J_{1j}$ ,  $J_{2j}$ , representan las densidades de corriente y tienen como argumentos  $(x_0, y_0)$ ;  $G_1$ ,  $G_2$  tiene como argumentos  $(x, y; x_0, y_0)$ . La densidad de flujo magnético en cada componente se obtiene como:

$$B'_x(x, y) = \partial A'(x, y) / \partial y \quad B'_y(x, y) = -\partial A'(x, y) / \partial x \quad (45)$$

A lo largo de las líneas de separación entre las regiones, los componentes axiales y radiales de la densidad de flujo magnético deben cumplir con las siguientes igualdades:

$$B'_{Ix}(x, y)|_{x=a_1} = B'_{IIx}(x, y)|_{x=a_1}; \\ B'_{Iy}(x, y)|_{x=a_1} = B'_{IIy}(x, y)|_{x=a_1}; \text{ etc.} \quad (46)$$

La solución de (40) con condiciones de contorno (41), cuando se considera sólo la fuerza magneto-motriz de magnetización  $B^*$ , está formada por una sola expresión. Esta vez, el dominio de cálculo no se divide en sub-dominios. Dentro de la ventana se coloca un solo conductor. La corriente que fluye a través de este conductor es igual a la fuerza magneto-motriz de magnetización ( $w \cdot i_{10} = w \cdot i_1 - i_2 \cdot w_2$ ). El campo magnético tangencial se define por la ecuación (47).

$$1/\mu_0 * \partial A(x_0, y_0) / \partial_n = H_t^*(x_0, y_0) \quad (47)$$

Teniendo en cuenta (40) y (47) el potencial vectorial magnético de dispersión dado únicamente por la fuerza magneto-motriz de magnetización se puede deducir con la siguiente expresión:

$$A^*(x, y) = \int_{\Gamma} G(x, y; x_0, y_0) \cdot H_t^*(x_0, y_0) \cdot ds_0 \quad (48)$$

Como consecuencia, la ecuación (48) puede ser integrada después de la obtención, por medio de otro método de cálculo, de la componente tangencial del campo magnético de dispersión  $H_t(x_0, y_0)$  sobre el límite  $\Gamma$  y calcular el potencial vectorial para cada uno de los cinco sub-dominios.

Aplicando el principio de superposición, el campo magnético de dispersión resultante  $B(x, y)$  dentro de la ventana del transformador se puede obtener como una suma de dos campos: uno es generado por los devanados  $b$  y  $B$  de la Figura 27 ( $B_B(x, y)$ ) correspondientes a una fase, y el otro viene dado por los devanados  $c$  y  $C$  de la Figura 27 ( $B_C(x, y)$ ) de otra fase. Por lo tanto:

$$B(x, y) = B_B(x, y) + B_C(x, y) \quad (49)$$

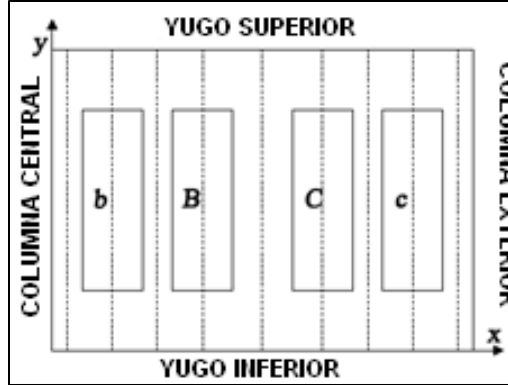
Como consecuencia las fuerzas radiales ( $F_x$ ) y las fuerzas axiales ( $F_y$ ) por unidad de longitud, que actúan sobre la bobina  $j$  que hace parte del bobinado de baja tensión (región II) y el bobinado de alta tensión (región IV) respectivamente, están dadas por las siguientes expresiones:

$$F_{x_{1j}, y_{1j}} = \int_{a_1}^{a'_1} \int_{a_{1j}}^{b'_1} J(x, y) * B_{IIy, IIx}(x, y) * dx * dy \quad (50)$$

$$F_{x_{2j}, y_{2j}} = \int_{a_2}^{a'_2} \int_{a_{2j}}^{b'_2} J_{2j}(x, y) * B_{IVy, IVx}(x, y) * dx * dy \quad (51)$$

Donde  $B_{IIy}$ ,  $B_{IVy}$  y  $B_{IIX}$ ,  $B_{IVX}$  son los componentes axiales y radiales de los campos magnéticos resultantes de dispersión  $B_{II}$  y  $B_{IV}$  que se calculan con (48).

Figura 27. Dominio de cálculo para determinar el campo magnético de dispersión.



**Fuente:** DEACONU, Ioan-Dragoş, et al. *Analytical Computation Method For Electrodynamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings*. p. 150.

### 2.2.3 Método de redes de reluctancia RNM

El método de redes de reluctancia equivalente RNM está basado en la ley de Ohm para circuitos magnéticos dada como:

$$V_{\mu i} = R_{\mu i} \cdot \Phi_i \quad (52)$$

Dónde:

$V_{\mu i}$  es la fuerza magnetomotriz,  $R_{\mu i}$  es la reluctancia del circuito y  $\Phi_i$  es el flujo magnético. Y las leyes de Kirchhoff para nodos y mallas:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad (53)$$

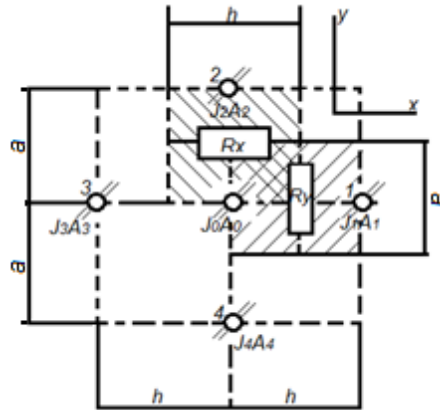
$$\sum_{k=1}^m V_{\mu k} = 0 \quad (54)$$

Este es uno de los métodos más viejos para modelar y calcular circuitos magnéticos en máquinas eléctricas, y en transformadores servirá para encontrar el flujo de dispersión necesario para el cálculo de los esfuerzos. Por otra parte, con el fin de modelar campos magnéticos alternos en la presencia de cuerpos metálicos sólidos, con sus características magnéticas no lineales y las corrientes de Foucault, se han introducido nuevas reluctancias complejas<sup>61</sup>.

<sup>61</sup> SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 145.

Su formulación es derivada del método de las diferencias finitas, iniciando con la ecuación (31) de Poisson en dos dimensiones con densidad de corriente por el eje z. Se trabaja con una malla como la indicada en la Figura 28.

Figura 28. Elemento rectangular de la red de reluctancia en 2D.



**Fuente:** SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 148.

En esta malla se define el potencial vectorial y se expande en series de Taylor, despreciando el error de truncamiento, para las componentes en x y y, obteniendo:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \approx \frac{A_1}{h^2} + \frac{A_3}{h^2} - \frac{2A_0}{h^2} \quad y \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \approx \frac{A_2}{a^2} + \frac{A_4}{a^2} - \frac{2A_0}{a^2} \quad (55)$$

Dónde:

$A_i$  es el potencial vectorial en el vértice  $i$ -ésimo,  $a$  y  $h$  son las dimensiones de la malla. Remplazando (55) en (31) se obtiene:

$$\frac{A_1 - A_0}{h^2} + \frac{A_3 - A_0}{h^2} + \frac{A_2 - A_0}{a^2} + \frac{A_4 - A_0}{a^2} = -\mu J \quad (56)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (52) por  $ah/\mu$  e introduciendo los valores de reluctancias en la dirección x ( $R_x$ ) y y ( $R_y$ ) elementales por 1 metro en el eje z, de la siguiente manera:

$$R_x = \frac{h}{\mu a * 1} \quad y \quad R_y = \frac{a}{\mu h * 1} \quad (57)$$

La ecuación (52) quedaría de la siguiente manera:

$$(A_1 - A_0)R_y + (A_3 - A_0)R_y + (A_2 - A_0)R_x + (A_4 - A_0)R_x = -I_0 \quad (58)$$

Donde  $I_0$  es la corriente en una malla, teniendo en cuenta la relación:

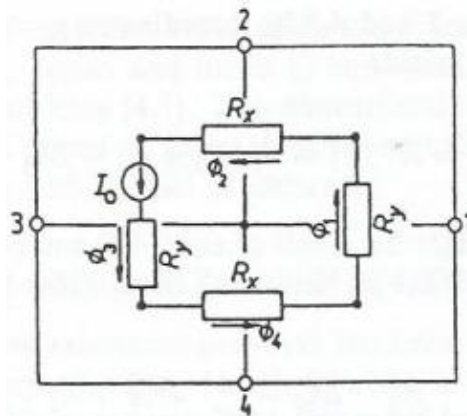
$$\Phi_i = \iint_{S_i} B_i * dS_i = \iint_{S_i} \nabla A_i * dS_i = \oint A_i * dI_i \quad (59)$$

$$\Phi_i = A_0 - A_i, \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, 4 \quad (60)$$

Sustituyendo la ecuación (60) en (58) se obtienen las siguientes ecuaciones de Kirchhoff y de Ohm para un circuito magnético como el indicado en la Figura 29.

$$\Phi_1 R_y + \Phi_3 R_y + \Phi_2 R_x + \Phi_4 R_x = I_0 \quad \text{ó} \quad \sum_{i=1}^4 \Phi_i R_i = I_0 \quad (61)$$

Figura 29. Circuito equivalente de reluctancia de una red.



**Fuente:** SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 150.

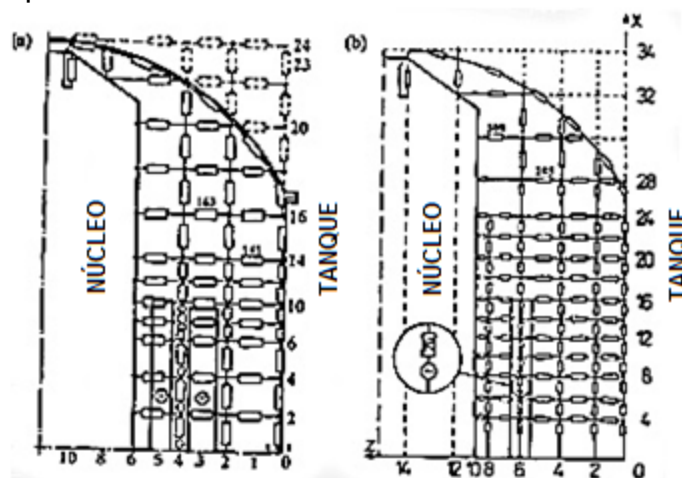
Ahora el problema se reduce a una adecuada estructuración de la malla para el transformador en estudio, y resolver el sistema multi-nodos usando algún programa. En la Figura 30 se presentan dos modelos 2D con diferente cantidad de nodos para una sección del 25% del transformador. Para obtener mayor precisión se puede realizar una malla con mayor cantidad de nodos, o con mallas más densas en los puntos de mayor interés, similar al FEM. En la Figura 31 se presenta un modelo 3D y su mallado.

Las reluctancias se calculan de diferentes maneras según; la densidad del mallado, si son muy densas, medianas o pequeñas; dependiendo de la ubicación de la reluctancia y del medio en el que se trabaja como; radial al núcleo, axial a lo



largo del aceite entre el tanque y el devanado, y también hay reluctancias complejas (componente real e imaginaria) para áreas conductoras<sup>62</sup>.

Figura 30. Modelo de red de reluctancia del campo de dispersión de un transformador de potencia con diferente cantidad de nodos.

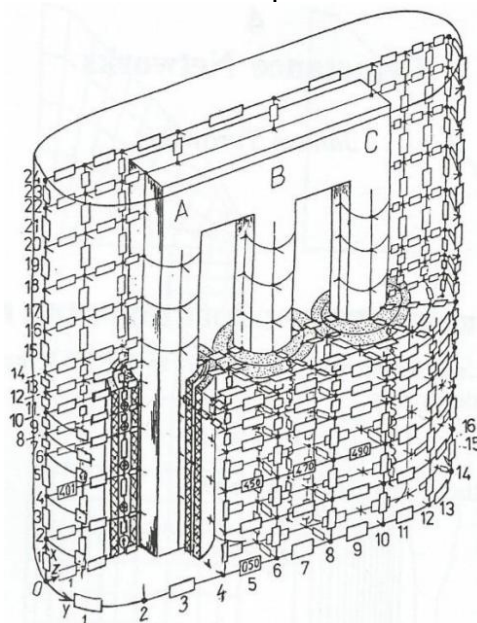


a) Entre 46 y 51 nodos

b) entre 89 y 91 nodos

**Fuente:** SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 151.

Figura 31. Modelo de red de reluctancia 3D equivalente básico para el campo de dispersión de un transformador trifásico de potencia.



**Fuente:** SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 146.

<sup>62</sup> SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetics*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 155-159.

Los principales beneficios de usar el RNM son evidentes en el cálculo de campos tridimensionales de geometrías complicadas, como ahorros significativos en tiempo y esfuerzo de computación que se puede lograr debido a la eficiencia de la formulación<sup>63</sup>. Se ha demostrado una equivalencia entre el RNM con los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos, que ha sido confirmado con aplicaciones para calcular el flujo y las pérdidas de dispersión en las paredes del tanque en transformadores de potencia<sup>64</sup>.

#### 2.2.4 Método de Elementos Finitos MEF

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico utilizado principalmente para la resolución de ecuaciones diferenciales e integrales, siendo ampliamente aplicado a campos electromagnéticos. La esencia de este método es dividir el dominio de aplicación en pequeños sub dominios llamados elementos finitos. Cada subdominio se trata de forma independiente para encontrar la solución del problema completo<sup>65</sup>.

Este método puede ser usado en el cálculo de problemas electromagnéticos estacionarios y transitorios, lineales y no lineales, isotrópicos y anisotrópicos, homogéneos y no homogéneos. Este método es muy útil para el cálculo en regiones limitadas con condiciones de contorno, pero es inconveniente para regiones no limitadas<sup>66</sup>.

El MEF puede ser aplicado de diferentes maneras, para problemas de dos dimensiones se usan subdominios o elementos que son triángulos con tres vértices o nodos. Dentro de estos elementos la variación de las cantidades a calcular es lineal. Para calcular fácilmente y con precisión las derivadas y las integrales se utiliza una gran cantidad de subdominios. Los elementos están limitados por los vértices y en ellos es donde se obtienen las cantidades a calcular<sup>67</sup>, si se desea obtener el valor en un punto diferente a los vértices, se pueden hallar por interpolación. Por ejemplo dentro de un elemento, como el

---

<sup>63</sup> SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetism*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 145.

<sup>64</sup> *Ibid.*, p. 146.

<sup>65</sup> AHMAD, Ashfaq; JAVED, Iqra y NAZAR, Waseem. Short Circuit Stress Calculation in Power Transformer Using Finite Element Method on High Voltage Winding Displaced Vertically. p. 303.

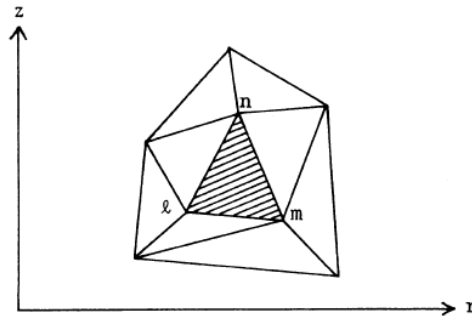
<sup>66</sup> SYKULSKI, Jan K. *Computational Magnetism*. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. p. 78.

<sup>67</sup> *Ibid.*, p. 82.

indicado en la Figura 32, potencial vectorial magnético  $A$  se considera que varía linealmente<sup>68</sup>, y se describe con la siguiente ecuación.

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot r + \alpha_3 \cdot z \quad (62)$$

Figura 32. Subdominio triangular para un problema de MEF en 2D.



**Fuente:** ANDERSEN, O.W. Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method. En: Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on. Volume: PAS-92. p. 683.

Esto es equivalente a una componente radial constante de densidad de flujo dentro del elemento. Sin embargo, la componente axial varía con la ubicación.

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} = -\alpha_3 \quad (63)$$

$$B_z = \frac{A}{r_c} + \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{A}{r_c} + \alpha_2 \quad (64)$$

Pero en la solución numérica, los triángulos se hacen lo suficientemente pequeños, de manera que la componente axial  $B$  en el centroide puede ser tomada como representativa para el triángulo en su conjunto.

Debido a la variación lineal en el elemento, el potencial vectorial  $A_c$  en el centroide es el promedio de los valores en los tres vértices:

$$A_c = \frac{1}{3}(A_l + A_m + A_n) \quad (65)$$

La densidad de flujo total es:

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_z^2} \quad (66)$$

<sup>68</sup> ANDERSEN, O.W. Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method. En: Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on. Volume: PAS-92. p. 683.

De (63), (64) y (66) se obtiene:

$$B = \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{2 \cdot \alpha_2}{r_c} \cdot A_c + \left(\frac{A_c}{r_c}\right)^2} \quad (67)$$

La fuerza se calcula como el producto de la densidad de flujo por la corriente y el largo del conductor:

$$F = B \cdot L \cdot I \quad (68)$$

Para un elemento triangular, con la longitud de una vuelta completa:

$$F = B \cdot J \cdot r_c \cdot D \quad (69)$$

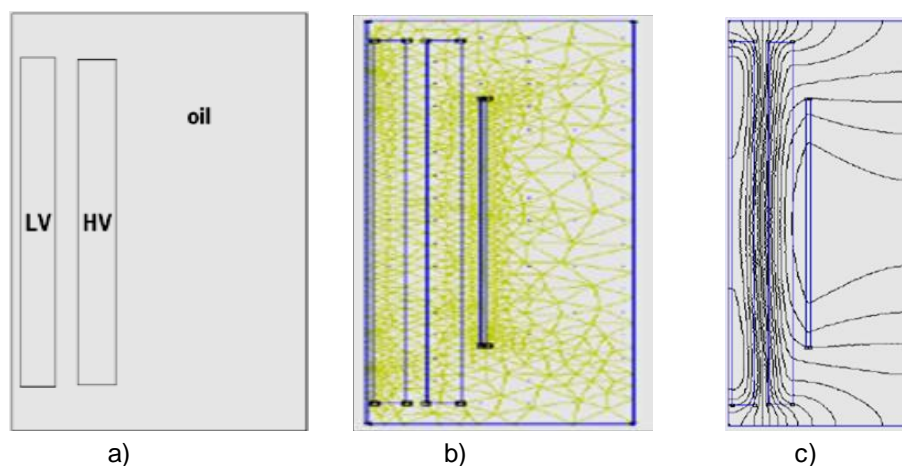
Lo anterior es una manera sencilla de describir el cálculo de la densidad de flujo y de la fuerza que se realiza por medio del MEF. Existen diferentes fórmulas derivadas para incluir las características de los materiales, los comportamientos lineales y no lineales, etc.

Hay varios programas basados en MEF, para realizar las simulaciones en estos programas se efectúan los siguientes pasos:

1. La geometría a resolver: que es básicamente el núcleo y sistema de devanado del transformador se representa como bloques rectangulares, Figura 33 a), aunque la representación si se desea puede ser más detallada. Debido a la simetría del problema se puede dibujar la mitad superior de la parte activa del transformador. Se puede construir la geometría usando la mayoría de los programas de CAD.
2. Una vez que la geometría se define, esta se divide en elementos finitos, cuanto más pequeño es el tamaño de cada malla o elemento, mayor será la exactitud de los resultados que se pueden conseguir (Figura 33 b)), sin embargo esto implica una carga computacional mayor y un tiempo de cálculo más prolongado.
3. Se asignan las propiedades electromagnéticas y mecánicas de cada uno de los bloques (conductores-núcleo-aislamiento-tanque), junto con las condiciones de contorno de Neumann y Dirichlet. Al asignar las propiedades a los bobinados, hay que asegurarse de que los ampere-vueltas de todos los regímenes de devanado sean iguales y opuestos.

4. La geometría se resuelve en el solucionador de MEF y se obtiene el diagrama de flujo de dispersión<sup>69</sup> como se muestra en la Figura 33 c).

Figura 33. Geometría y mallado en programa de MEF para caso de estudio de esfuerzos de cortocircuito en un transformador.



**Fuente:** AHMAD, Ashfaq; JAVED, Iqra y NAZAR, Waseem. Short Circuit Stress Calculation in Power Transformer Using Finite Element Method on High Voltage Winding Displaced Vertically. p. 304.

Otra manera de aplicar el MEF es a través de un modelado en 3D, para esto se requiere más esfuerzo de cálculo y detalle en la construcción de la geometría, sin embargo se obtiene más información y mejor precisión. Se ha demostrado que un enfoque 3D es también necesario para examinar las asimetrías fuera de la ventana que no son posibles con el análisis 2D<sup>70, 71</sup>.

El cálculo de los esfuerzos por MEF requiere especificaciones de materiales de los componentes de transformadores. Además de una etapa de pre-procesamiento compleja (por ejemplo, dibujo de un modelo a escala, el establecimiento de la malla apropiada, introducción de las características de los materiales, establecimiento de las condiciones de frontera)<sup>72</sup>.

<sup>69</sup> AHMAD, Ashfaq; JAVED, Iqra y NAZAR, Waseem. Short Circuit Stress Calculation in Power Transformer Using Finite Element Method on High Voltage Winding Displaced Vertically. p. 304.

<sup>70</sup> BASHIR, Mahdi Ebrahimi, et al. Analytical estimation of short circuit axial and radial forces on power transformers windings. p. 250.

<sup>71</sup> FAIZ, Jawad; MAHDI EBRAHIMI, Bashir y NOORI Tahere. Three- and Two-Dimensional Finite-Element Computation of Inrush Current and Short-Circuit Electromagnetic Forces on Windings of a Three-Phase Core-Type Power Transformer. p. 591.

<sup>72</sup> DEACONU, Ioan-Dragoș, et al. Analytical Computation Method For Electrodinamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings. p. 153.

### 3. SELECCIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO

#### 3.1 PROCESO DE SELECCIÓN

Para realizar la selección del método que se va a implementar, se usa el método de puntajes ponderados<sup>73</sup>, teniendo en cuenta los siguientes criterios y su peso porcentual, que están basados en las limitaciones que tiene un proyecto de pregrado (tiempo, recurso tecnológico, información de fabricantes):

- Información requerida del transformador. 20% (importante)
- Extensión y complejidad de los cálculos. 30% (muy importante)
- Practicidad y rapidez al momento de aplicarlo. 10% (poco importante)
- Información de salida que se obtiene y precisión. 40% (lo más importante)

Lo que se busca es utilizar un método que requiera de poca información del transformador, con extensión y complejidad de los cálculos reducida, de aplicación práctica y rápida, que permita obtener resultados precisos.

Una vez definidos los criterios se procede a calificar cada método para hacer una posterior evaluación y escoger la mejor alternativa que cumpla con los anteriores criterios. La calificación se realizará numéricamente del 1 a 5, tomando 5 como la mejor calificación y 1 como la peor.

Según la información requerida del transformador, se ponderarán con mayor calificación aquellos métodos que requieran menos información. Los métodos aproximados no requieren de datos muy específicos, solamente necesitan las dimensiones geométricas globales y conocer la configuración de las tomas de derivación, por lo tanto su calificación es de 5. Los métodos de Roth, de Rabins y la función de Green requieren de la misma información para hacer los cálculos, necesitan mayor detalle por la ubicación de los canales de refrigeración para hacer más preciso el método, por lo tanto su calificación es de 4. Para los métodos de RNM y MEF, la precisión de estos métodos está estrechamente relacionada con la geometría a resolver, además de incluir las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales de los devanados, el aislamiento y el núcleo, de este modo se asignó una calificación de 1.

---

<sup>73</sup> ANDERSON, David R., et al. Métodos cuantitativos para los negocios. 11 Ed. Cengage Learning Editores, p. 105.

Según la extensión y complejidad de los cálculos, los métodos aproximados tienen fórmulas que no son extensas, no requieren de sumatorias ni cálculos diferenciales o integrales, esto le amerita una calificación de 5. Los métodos de Roth y de Rabins incluyen series de Fourier y presentan más ecuaciones para encontrar la solución final, además el método de Rabins adiciona las funciones especiales de Bessel y de Struve, lo que complica su tratamiento, por lo tanto el método de Roth tiene una calificación de 4 y el de Rabins tiene 3.

El método de la función de Green divide el problema en varias regiones, al igual que los métodos de Roth y Rabins, también hace uso de sumatorias, se requiere la solución de la función de Green, por lo tanto se asigna una calificación de 3. Los métodos de RNM y MEF son los que requieren más cálculo por dividir el problema en varios puntos, el primero en redes y el segundo en elementos, pero la eficiencia de la formulación del RNM reduce sus cálculos y tiempo de cómputo comparado con el MEF. Debido a esto la calificación del método de RNM es 2 y del MEF es 1.

Según la practicidad y rapidez, los métodos aproximados son los más prácticos, obteniendo por lo tanto una calificación de 5, seguido por los métodos de Roth, de Rabins, y la función de Green, la calificación de cada uno de estos métodos es de 4. Los métodos de RNM y MEF son más cuidadosos al momento de aplicarlos, por requerirse de la construcción de la geometría del problema, y la estructuración de la red o mallado adecuado para garantizar la precisión, pero el RNM requiere de menor tiempo comparado con el MEF, inclusive durante el proceso de cálculo, por lo tanto el RNM tiene una calificación de 2 y el MEF de 1.

Según la información de salida de cada método, se debe tener en cuenta la cantidad o detalle que ella tiene para describir el comportamiento de los esfuerzos y la precisión de los datos. Considerando que hay pocas publicaciones sobre mediciones directas de esfuerzos dinámicos de cortocircuito, y menos aún su comparación directa con cada método, se tomaron como base los resultados obtenidos por medio del MEF el cual ha sido ampliamente comparado con los demás métodos, y es considerado como uno de los más precisos. Teniendo en cuenta lo anterior se presentan los errores de cada método en la Tabla 2, tomando los valores de varias publicaciones<sup>74,75, 76, 77</sup>.

---

<sup>74</sup> ROSENTINO, Jr. Arnaldo José, et al. Modelling and Analysis of Electromechanical Stress in Transformers Caused by Short-Circuits. En: Renew able Energy and Power Quality Journal (2011). ISSN: 2172-038 X. p. 435.

<sup>75</sup> BASHIR, Mahdi Ebrahimi, et al. Analytical estimation of short circuit axial and radial forces on power transformers windings. p. 256-257.

<sup>76</sup> DEACONU, Ioan-Dragoș, et al. Analytical Computation Method For Electrodinamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings. p. 152-153.



Tabla 2. Errores porcentuales que presenta cada método comparado con simulaciones por MEF.

Método	Fuerza radial en el devanado exterior	Fuerza radial en el devanado interior	Fuerza axial en el devanado exterior	Fuerza axial en el devanado interior
Aproximado	9,6%	16,9%	20,1%	15,2%
Roth	5,3%	4,9%	5,9%	8,6%
Rabin	0,5%	0,5%	7,7%	5,7%
Green	0,4%	0,5%	6,1%	7,3%

\*No se incluyen los errores para el método de MEF por que se tomó este como referencia para el cálculo de los errores relativos porcentuales.

En la Tabla anterior no se incluyó el RNM debido a la falta de información que compare los métodos MEF y RNM estrictamente para los esfuerzos de cortocircuito, pero si hay publicaciones que los han comparado para el cálculo de campo de dispersión, lo que sirve como elemento de análisis, ya que el campo de dispersión es usado para el cálculo de los esfuerzos. Se han obtenido errores del 4% para la intensidad de campo magnético de dispersión<sup>78</sup>, con el método de RNM se pueden obtener errores menores si se construye el modelo con suficiente detalle.

De la Tabla 2, se puede observar que el método con mayor error es el aproximado, como consecuencia su calificación es de 1, seguido por el método de Roth con una calificación de 3. Los métodos de Rabin y la función de Green tienen errores muy similares, como resultado su calificación es la misma para ambos, siendo esta de 4 por ser menor en algunos casos que el error presente en el método de Roth. Los métodos más precisos son el RNM y MEF, por lo tanto su calificación es de 5.

Según el detalle de la información obtenida, el método aproximado solo indica los esfuerzos máximos y los ubica en la altura media del devanado, también permite estimar el esfuerzo en los extremos del devanado, su nivel de detalle es regular y su calificación correspondiente es de 2. Los métodos de Roth, Rabins y la función de Green entregan el esfuerzo en cada división que se realizó del devanado, puede ser por grupo de bobina, por conductor o simplemente por una fracción aleatoria, su nivel de detalle es mayor que el del método aproximado obteniendo

<sup>77</sup> ŠTRAC, Leonardo; KELEMEN, Franjo y ŽARKO, Damir. Analysis of short-circuit forces at the top of the low voltage U-type and I-type winding in a power transformer. p. 857.

<sup>78</sup> TUROWSKI, Janusz; TUROWSKI Marek y KOPEC, Miroslaw. Method of three-dimensional network solution of leakage field of three-phase transformers. p. 2918.



cada uno una calificación de 4. El RNM y el MEF al dividir el problema en pequeños conjuntos (redes o elementos), permiten obtener información por cada uno de ellos, adicionalmente son métodos que pueden ser aplicados en 3 dimensiones, logrando así el mayor detalle en la información, como resultado su calificación es de 5.

Teniendo en cuenta los criterios de evaluación, a continuación se mostrará la calificación con puntajes ponderados que obtiene cada método, los valores se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Calificación en puntajes de cada método.

Criterio	Información requerida		Extensión y complejidad de los cálculos		Practicidad y rapidez		Información obtenida				Total
Peso	20%		30%		10%		Detalle	Precisión			
							20%		20%		
Método	Calif.	Pond.	Calif.	Pond.	Calif.	Pond.	Calif.	Pond.	Calif.	Pond.	
Aproximado	5	1	5	1,5	5	0,5	2	0,4	1	0,2	3,6
Roth	4	0,8	4	1,2	4	0,4	4	0,8	3	0,6	3,8
Rabin	4	0,8	3	0,9	4	0,4	4	0,8	4	0,8	3,7
Green	4	0,8	3	0,9	4	0,4	4	0,8	4	0,8	3,7
RNM	1	0,2	2	0,6	2	0,2	5	1	5	1	3,0
FEM	1	0,2	1	0,3	1	0,1	5	1	5	1	2,6

El método que obtuvo el mayor puntaje ponderado total es el método de Roth, por lo tanto en la sección se realizarán las estimaciones de los esfuerzos usando este método, a continuación se muestra con más detalle el proceso de cálculo con el método seleccionado.

### 3.2 CÁLCULO DE LAS FUERZAS

Se considera el potencial vectorial magnético  $A$  como aparece en la ecuación (33) en cualquier punto dentro de la ventana del transformador, teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales (30) y (31) que regulan el campo. Además de la ecuación (32) que calcula la densidad de corriente. Ahora se definen las siguientes condiciones de contorno del potencial vectorial:

$$(A_x)|_{y=0} = \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) |_{y=0} = 0 \quad (70 \text{ a})$$

$$(A_x)|_{y=h} = \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) |_{y=h} = 0 \quad (70 \text{ b})$$

$$(A_y)|_{x=0} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) |_{x=0} = 0 \quad (70 \text{ c})$$

$$(A_y)|_{x=w} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) |_{x=w} = 0 \quad (70 \text{ d})$$

La formula (33) debe cumplir con las ecuaciones de Poisson (31) y Laplace (30). Con estas condiciones se calculan los coeficientes  $C_{mn}$  de la ecuación (33) para los siguientes valores de  $m$  y  $n$ .

Para  $m \neq 1$  y  $n \neq 1$ :

$$C_{m,n} = \frac{4 \cdot \mu_0}{w \cdot h} \cdot \frac{1}{M_m^2 + N_n^2} \cdot \sum_{j=1}^q J_j \cdot \frac{\sin(M_m \cdot w'_j) - \sin(M_m \cdot w_j)}{M_m} \cdot \frac{\sin(N_n \cdot h'_j) - \sin(N_n \cdot h_j)}{N_n} \quad (71)$$

Donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre,  $J_j$  es la densidad de corriente calculada con (32),  $M_m$  y  $N_n$  se expresan como sigue:

$$M_m = (m-1) \cdot \frac{\pi}{w} \quad (72)$$

$$N_n = (n-1) \cdot \frac{\pi}{h} \quad (73)$$

Cuando  $m=1$  y  $n \neq 1$  el coeficiente  $C_{mn}$  se evalúa por:

$$C_{m,n} = \frac{2 \cdot \mu_0}{w \cdot h} \cdot \sum_{j=1}^q J_j \cdot (w'_j - w_j) \cdot \frac{\sin(N_n \cdot h'_j) - \sin(N_n \cdot h_j)}{N_n} \quad (74)$$

Cuando  $n=1$  y  $m \neq 1$  el coeficiente  $C_{mn}$  se evalúa utilizando:

$$C_{m,n} = \frac{2 \cdot \mu_0}{w \cdot h} \cdot \sum_{j=1}^q J_j \cdot (h'_j - h_j) \cdot \frac{\sin(M_m \cdot w'_j) - \sin(M_m \cdot w_j)}{M_m} \quad (75)$$

Cuando  $m=1$  y  $n=1$ . Puesto que  $A$  tiene un origen arbitrario,  $C_{1,1}$  es una constante que puede ser ignorada.

Se puede calcular la densidad de flujo de campo magnético como el rotacional del potencial vectorial magnético definido en la ecuación (33) usando las siguientes ecuaciones:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad (76 \text{ a})$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \quad (76 \text{ b})$$

Entonces, las fuerzas antes mencionadas serán calculadas para un filamento de área  $dx \times dy$ . Por último, las fuerzas totales axiales y radiales respecto a la altura de los devanados se determinan como sigue:

$$f_{rj} = J_j \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} B_y dx dy = -J_j \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} \frac{\partial A}{\partial x} dx dy \quad (77 \text{ a})$$

$$f_{aj} = J_j \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} B_x dx dy = J_j \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} \int_{h_j w_j}^{h'_j w'_j} \frac{\partial A}{\partial y} dx dy \quad (77 \text{ b})$$

Al final las fuerzas radiales y axiales por unidad de longitud en dirección del eje  $z$  son calculadas por:

$$F_{rj} = -J_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \cdot \frac{(\cos(M_m \cdot w'_j) - \cos(M_m \cdot w_j)) \cdot (\sin(N_n \cdot h'_j) - \sin(N_n \cdot h_j))}{N_n} \quad (78 \text{ a})$$

$$F_{aj} = J_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \cdot \frac{(\sin(M_m \cdot w'_j) - \sin(M_m \cdot w_j)) \cdot (\cos(N_n \cdot h'_j) - \cos(N_n \cdot h_j))}{M_m} \quad (78 \text{ b})$$

### 3.3 ALGORITMO DEL CÁLCULO DE LA CORRIENTE Y LAS FUERZAS DE CORTOCIRCUITO

Para calcular las fuerzas de cortocircuito, es necesario conocer primero la corriente de cortocircuito que circula por los devanados. Para esto se debe conocer la siguiente información básica del transformador:

- Tensiones nominales de los devanados [kV]
- Potencia nominal de transformador [kVA]
- Impedancia de cortocircuito del transformador [ $\Omega$  o pu], de ser posible conocer la resistencia y la reactancia por separado [ $\Omega$ ].
- Conexión de los devanados [D o Y]

Si se dispone de la información del punto de conexión del transformador se puede agregar la potencia de cortocircuito y la tensión nominal del sistema, esto con el fin de calcular la corriente real de cortocircuito que afectará al transformador:

- Potencia de cortocircuito del sistema [kVA]
- Tensión nominal del sistema [kV]

Usando la información anterior y las ecuaciones indicadas en la sección 2.1 se elabora el algoritmo de la Figura 34 para calcular la corriente de cortocircuito en [A] que circula por cada devanado.

Después de conocer la corriente que circula por cada devanado, se procede a calcular la densidad de corriente y la fuerza que experimenta cada devanado. Para ello se debe ingresar la siguiente información que corresponde a los parámetros geométricos del transformador:

- Alto y ancho de la ventana del transformador
- Número de capas por cada devanado
- Distancia interna de cada capa, medida desde la columna del núcleo
- Distancia externa de cada capa, medida desde la columna del núcleo
- Altura inferior de cada capa, medida desde el yugo inferior del núcleo
- Altura superior de cada capa, medida desde el yugo inferior del núcleo
- Número de espiras de cada capa.

Todas las longitudes anteriores se expresan en metros, adicionalmente se indica el número de divisiones en la altura que se requieren para calcular la fuerza en cada altura del devanado. También se debe ingresar el orden de las series de Fourier, que es igual para las dos series.

Con la información anterior y usando las ecuaciones mostradas en la sección 3.2, se organiza el algoritmo de la Figura 35 para el cálculo de las fuerzas de cortocircuito.

Al final del algoritmo se presentan las gráficas que describen la distribución de las fuerzas radiales y axiales a lo largo de la altura del devanado, y el valor máximo de cada una, incluyendo la fuerza acumulada en la dirección axial.

Adicionalmente, si se dispone de la información necesaria, se pueden calcular la frecuencia mecánica natural del sistema, y las tensiones máximas que sirven para determinar si se sobrepasa alguno de los valores críticos o máximos de las tensiones indicadas en la sección 1.2, con esto se establece la posible ocurrencia de alguno de los fallos mencionados anteriormente y la cercanía de la frecuencia mecánica natural con respecto a la frecuencia eléctrica de la red de potencia y del doble de ella.

Figura 34. Algoritmo para el cálculo de la corriente de cortocircuito.

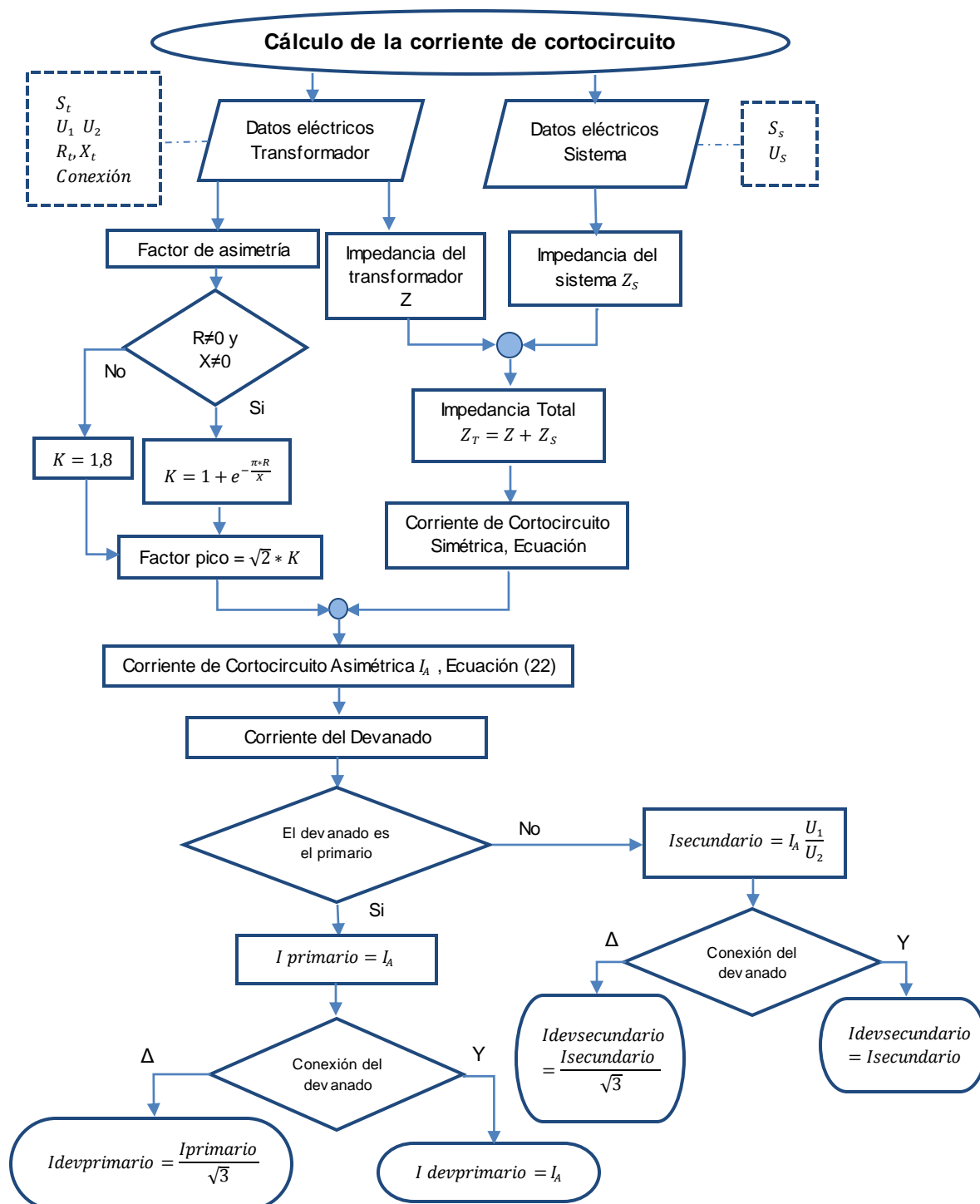
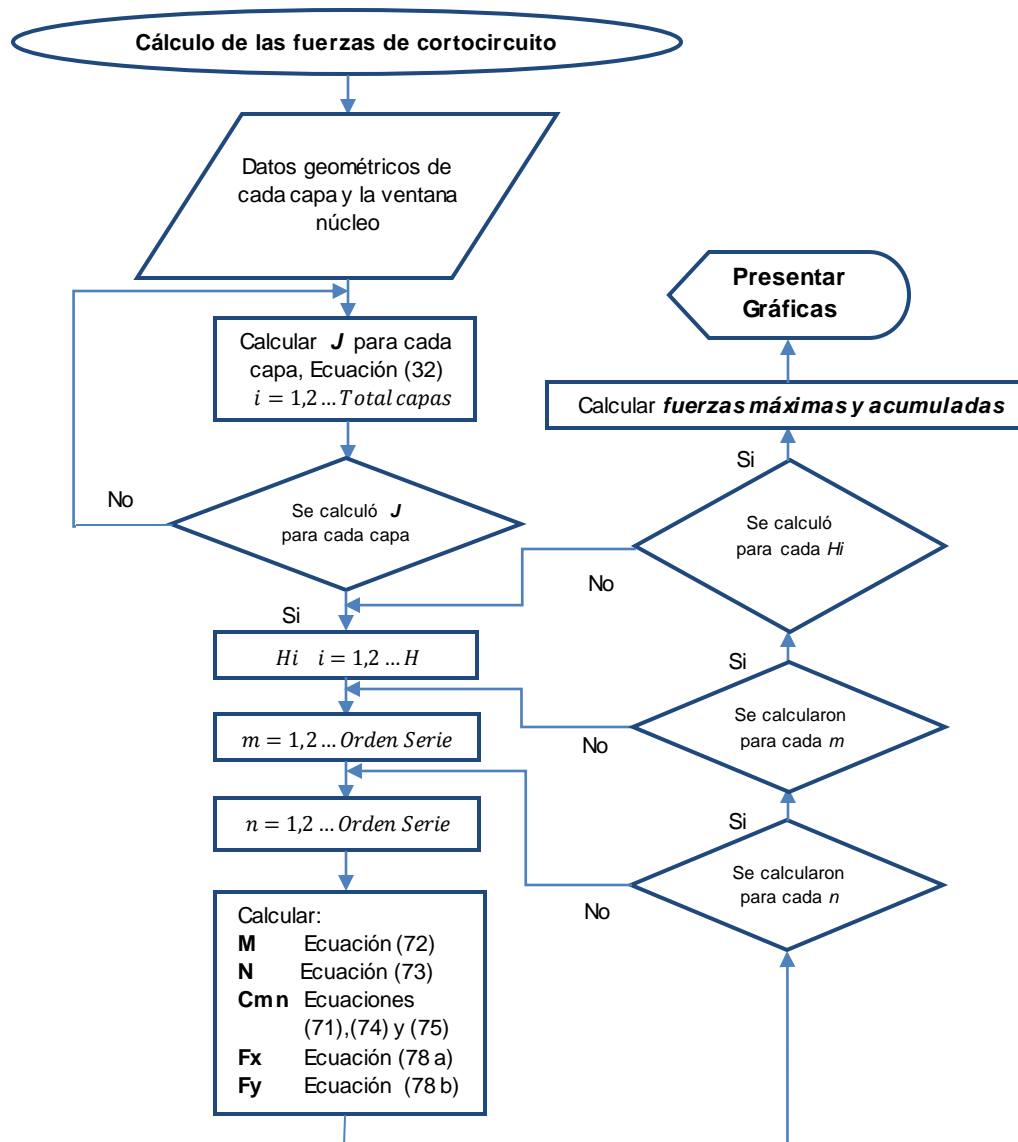


Figura 35. Algoritmo para el cálculo de las fuerzas de cortocircuito.



#### 4. HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

Se implementaron en MATLAB® los algoritmos para el cálculo de la corriente de cortocircuito y de las fuerzas de cortocircuito que se indicaron en la sección 3.3, introduciendo toda la información por medio de la consola sin HIM. De igual manera se presentan los resultados de los cálculos.

Para validar la herramienta implementada, se utilizó la información de un transformador trifásico de 630kVA disponible una de las referencias bibliográficas consultadas<sup>79</sup>. Lamentablemente no se encontró un caso que presentara toda la información necesaria para calcular las tensiones mecánicas producidas por las fuerzas de cortocircuito o la frecuencia natural.

La información del transformador de análisis se presenta en la Tabla 4 y las dimensiones geométricas se muestran en la Figura 36.

Tabla 4. Datos eléctricos del transformador de análisis.

Potencia nominal [kVA]	630
Numero de fases	3
Tensión nominal del primario [kV]	10
Tensión nominal del secundario [kV]	0,4
Impedancia de cortocircuito [%]	5,58
Espiras del primario	1082
Espiras del secundario	25
Grupo de conexión	$\Delta y5$

**Fuente:** DEACONU, Ioan-Dragoş, et al. Analytical Computation Method For Electrodynamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings. p. 151.

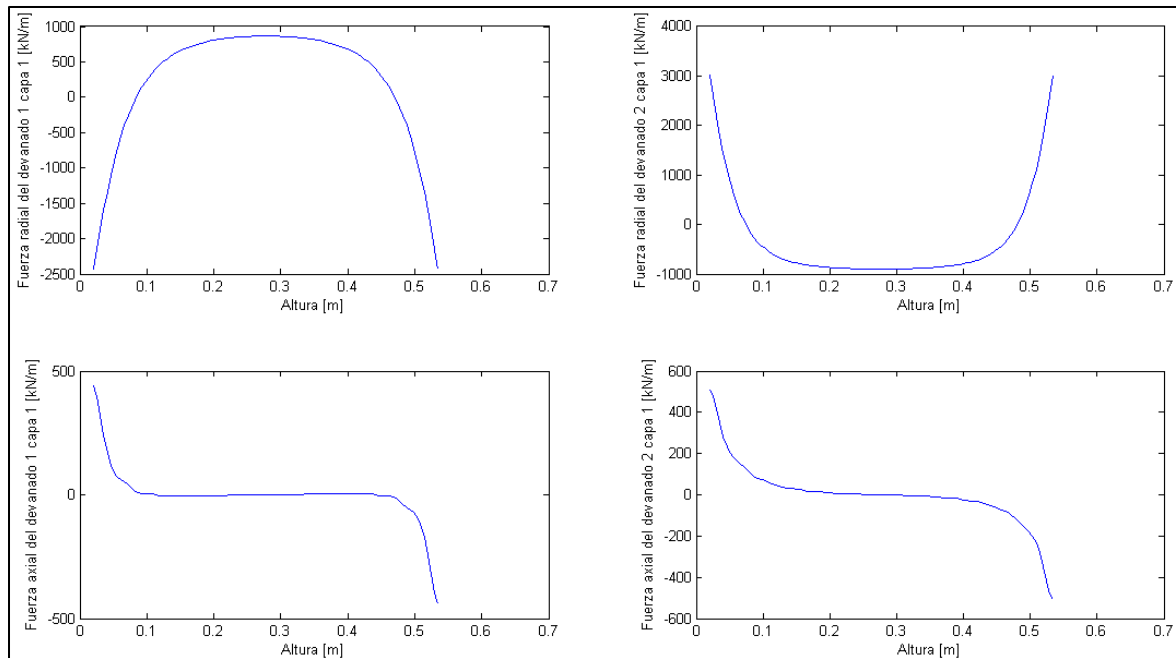
Para el mismo transformador se revisó el efecto del número de armónicos usados en las series de Fourier (Figura 37, Figura 38 y Figura 39) y la cantidad de divisiones en la altura (Figura 38, Figura 40 y Figura 41), para efectos de análisis se ha asumido que el devanado 1 es el devanado exterior, en este caso el de alta tensión, y el devanado 2 el devanado interior, en este caso el de baja tensión.

<sup>79</sup> DEACONU, Ioan-Dragoş, et al. Analytical Computation Method For Electrodynamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings. p. 151.



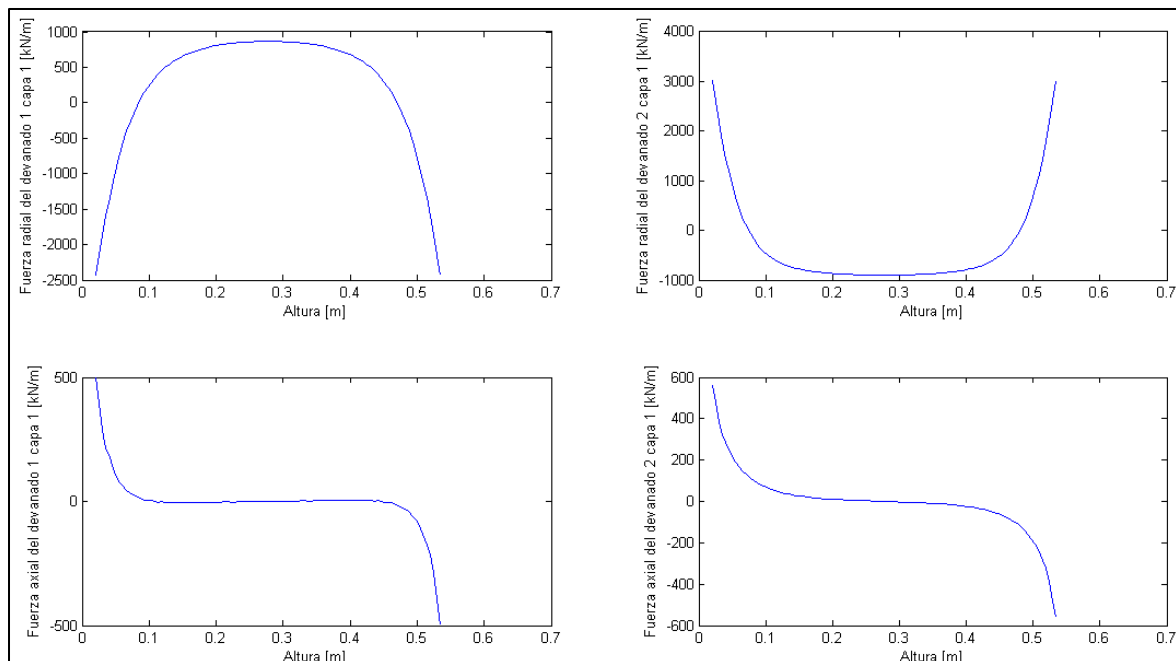


Figura 38. Fuerzas calculadas con 30 armónicos y 100 divisiones en la altura.



Tiempo de cálculo = 2,161 segundos

Figura 39. Fuerzas calculadas con 60 armónicos y 100 divisiones en la altura.

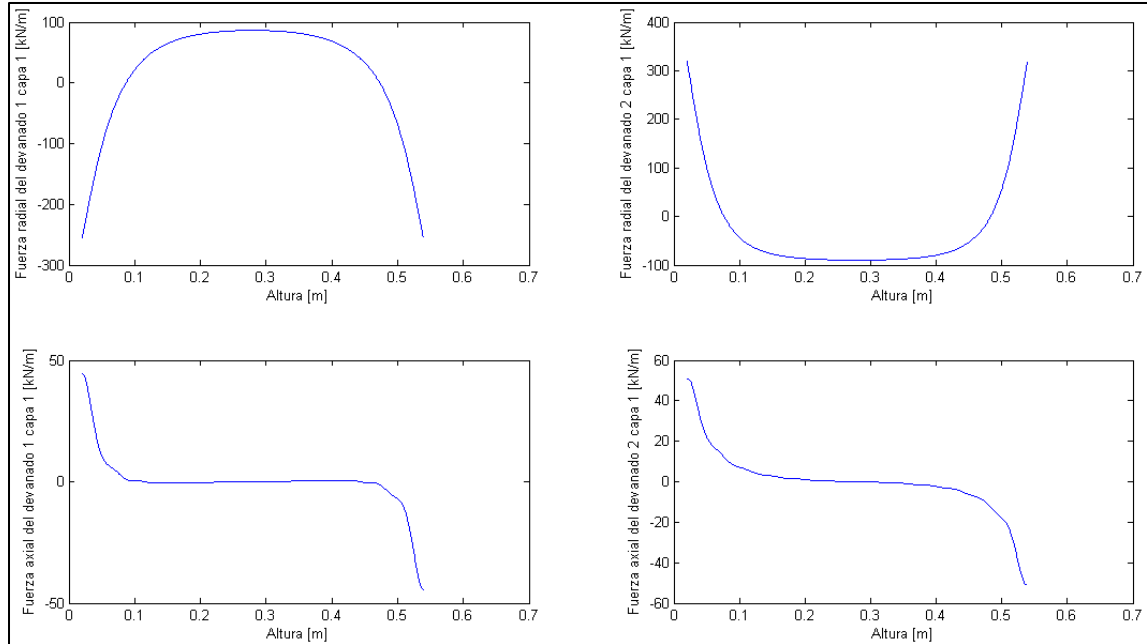


Tiempo de cálculo = 3,420 segundos

De acuerdo a los resultados obtenidos se determina que el número adecuado de armónicos es 30, ya que con 20 se presentan ondulaciones y con 60 no hay un

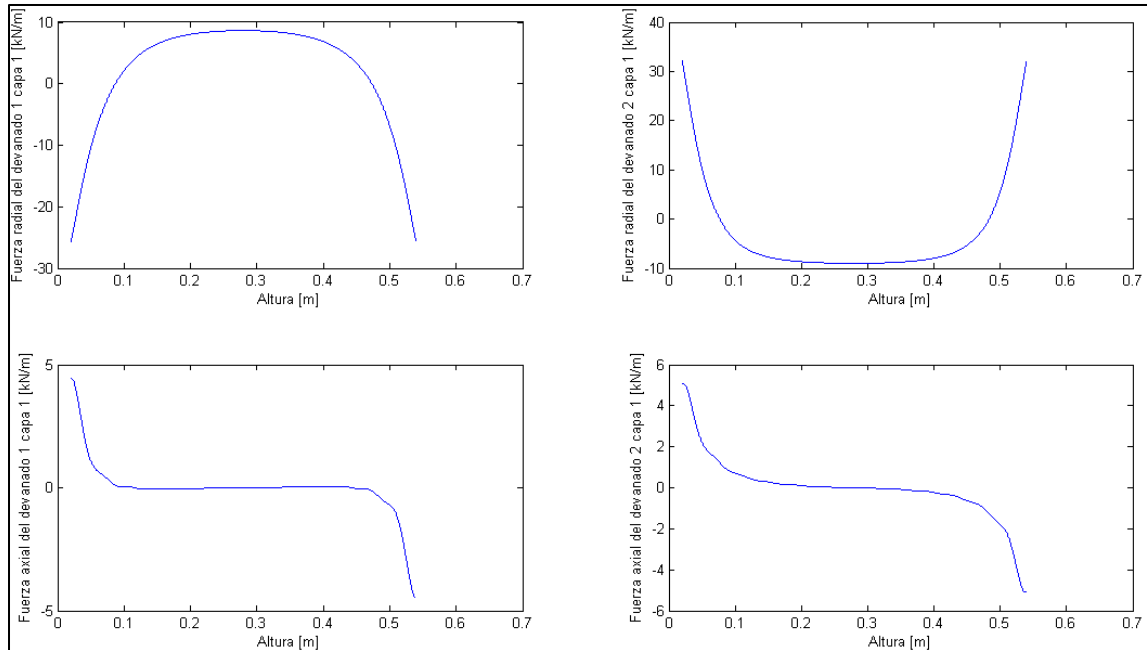
cambio notorio. Usando 30 armónicos se realizan las gráficas de la Figura 40 y Figura 41.

Figura 40. Fuerzas calculadas con 30 armónicos y 1000 divisiones en la altura.



Tiempo de cálculo = 4,654 segundos

Figura 41. Fuerzas calculadas con 30 armónicos y 10000 divisiones en la altura.



Tiempo de cálculo = 45,444 segundos

De los cálculos realizados se encontraron las siguientes fuerzas máximas aplicadas indicadas en la Tabla 5.

Tabla 5. Resultados obtenidos con diferente cantidad de armónicos y divisiones en la altura del devanado.

Armónicos	Fuerza [kN/m]					FEM*
	20	30			60	
Divisiones	100	100	1000	10000	100	
Fuerza radial máxima devanado 1	868,21	865,09	86,52	8,652	864,16	911,22
Fuerza radial máxima devanado 2	-908,41	-899,14	-89,92	-8,992	-898,89	-913,4
Fuerza axial máxima devanado 1	21,72	20,63	20,63	20,63	20,81	20,67
Fuerza axial máxima devanado 2	42,69	41,83	41,83	41,83	41,99	26,54
Fuerza axial acumulada devanado 1	-8,5265e-13	-6,2528e-13	-2,1387e-12	-3,7019e-12	-1,2506e-12	-----
Fuerza axial acumulada devanado 2	-1,2051e-11	-9,3223e-12	-1,7266e-11	1,3323e-14	-9,0949e-12	-----

**Fuente:** Elaboración propia. \*DEACONU, Ioan-Dragoș, et al. *Analytical Computation Method For Electrodynamical Forces Acting Over Electrical Transformer Windings*. p. 152.

De la Tabla 5 se puede observar que los resultados más cercanos a los esperados se pueden obtener con 30 y 60 armónicos para 100 divisiones en la altura. En la Tabla 6 se presentan una comparación de los valores obtenidos para estos dos casos frente a los resultados presentados por el método de elementos finitos.

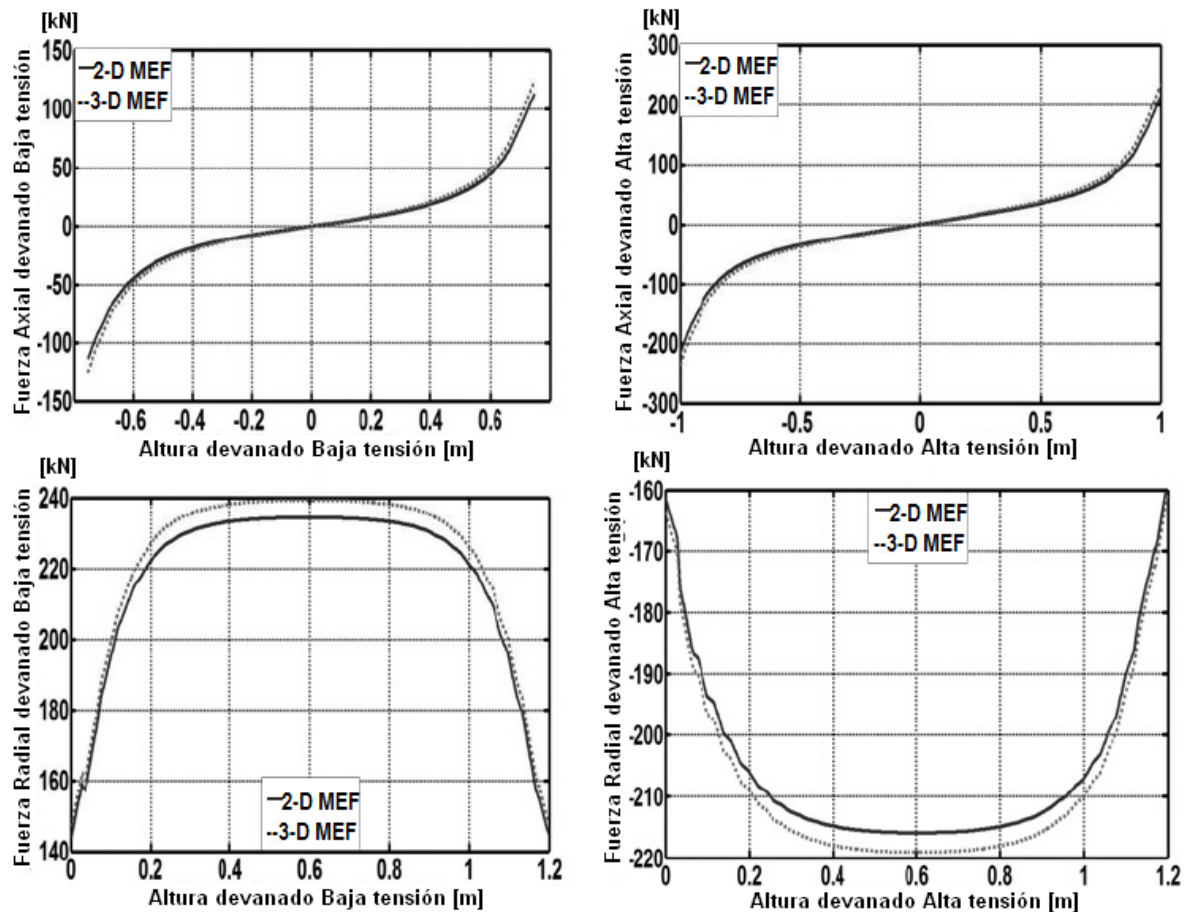
Tabla 6. Comparación de los resultados obtenidos frente a MEF.

Armónicos	30	Error [%]	60	Error [%]	FEM*
	100		100		
Fuerza radial máxima devanado 1	865,09	5,1	864,16	5,2	911,22
Fuerza radial máxima devanado 2	-899,14	1,6	-898,89	1,6	913,4
Fuerza axial máxima devanado 1	20,63	0,2	20,81	0,7	20,67
Fuerza axial máxima devanado 2	41,83	57,6	41,99	58,2	26,54

**Fuente:** Elaboración propia. \*DEACONU, Ioan-Dragoș, et al. *Analytical Computation Method For Electrodynamical Forces Acting Over Electrical Transformer Windings*. p. 152.

De la Tabla 6 se puede decir que el valor adecuado de armónicos está muy cercano a 30. Se puede observar que se obtienen valores muy altos de la fuerza axial en el devanado 2 lo que indica una disparidad del método. En la Figura 42 se muestra una gráfica obtenida en otro caso de estudio que sirve como referencia para analizar la forma de la onda obtenida.

Figura 42. Graficas de referencia basadas en otro caso de estudio.



**Fuente:** BASHIR, Mahdi Ebrahimi, et al. Analytical estimation of short circuit axial and radial forces on power transformers windings. En: IET Generation, Transmission & Distribution. 2014, Vol. 8, Iss. 2, p. 258.

Revisando las gráficas de la Figura 37 a la Figura 42 y los valores indicados en la Tabla 5 y Tabla 6, se pueden encontrar los siguientes inconvenientes:

- Respecto al número de armónicos, para un valor de 20 armónicos la gráfica presenta muchas ondulaciones que alteran el valor de la fuerza en cada división del devanado en la altura, pero alrededor de 30 armónicos presenta una curva más suave que permite estimar en una mejor medida el valor de la fuerza en cada punto. De ser necesario se puede aumentar el número de

armónicos pero no se presentará una mejora muy notoria, como en el caso presentado de 60 armónicos, en cambio sí aumentaría el tiempo de procesamiento.

- El patrón que describen las curvas es el adecuado para cada caso, como los mostrados en la Figura 42, pero las curvas de las fuerzas radiales no se ubican adecuadamente en el sistema coordenado, este problema puede deberse a una mala referencia, aunque según la revisión en las fuentes bibliográficas se están tomando correctamente el origen en el sistema de coordenadas. Además, este tipo de problema no se presenta en las fuerzas axiales, lo que indica una disparidad en el método que se usa para el cálculo de estas fuerzas.
- La magnitud de las fuerzas indicadas en las gráficas cambia con el número de divisiones en la altura del devanado, efecto que no debería ocurrir. Esto puede ser causado por factores que incluyen funciones trigonométricas que dependen de la altura, como se observa en las ecuaciones usadas para el cálculo de  $C_{mn}$ . Aunque para 100 divisiones en la altura se obtienen resultados cercanos a los esperados según MEF.

Además de lo mencionado anteriormente, este tipo de inconvenientes puede tener su causa en la falta de claridad sobre algunos valores dentro de las formulas mencionadas en el método de Roth, ya que para algunos términos se presentan indeterminaciones como  $0/0$ , y en el método no se indica cómo tratar estos casos. Aunque al aplicarse el teorema de L' Hôpital se obtiene un valor final de cero.

Se debe tener en cuenta también, que en el cálculo del potencial vectorial magnético se asume un valor constante igual a cero ( $C_{mn}$  para  $m=n=1$ ), ya que este puede tener un origen arbitrario, pero no se indica en el método si esto también es aplicable para las fórmulas de las fuerzas.

Después de haberse presentado el anterior problema, se realizó una búsqueda exhaustiva en las fuentes bibliográficas y en las bases de datos de las que dispone la universidad, pero no se encontró una razón o solución a estos inconvenientes.

Se programó adicionalmente usando las formulas presentadas en el libro de Malcom Waters para este método, que son un poco diferentes a las indicadas en la sección 3.2, pero se obtuvieron los mismos resultados con un mayor tiempo de

procesamiento. También se usó otra herramienta de programación para revisar las ecuaciones usadas y descartar posibles errores de programación. En este caso se usó el software MATHEMATICA de Wolfram, pero se siguieron presentando los mismos inconvenientes.

## 5. CONCLUSIONES

Es necesario conocer el tipo de devanado y de conductor usado en la construcción del transformador para determinar el tipo de falla que puede presentarse en él, de esta manera es más fácil tomar medidas preventivas que eviten su ocurrencia.

Las tensiones mecánicas críticas no dependen de la fuerza de cortocircuito aplicada, sino de las características mecánicas de los materiales usados, de su geometría y de la construcción del devanado, por lo tanto se puede conocer la tensión crítica sin saber el esfuerzo presente.

Con el resultado obtenido hasta el momento de la investigación y aplicación del método de Roth, se puede decir que su aplicación es adecuada para casos donde se desee conocer los esfuerzos máximos, más no para determinar el esfuerzo en cada punto del devanado.

Para conocer de una manera muy precisa el comportamiento dinámico de un transformador bajo cortocircuito, se requiere de mayor información sobre las características mecánicas de los materiales usados, conocer el efecto que tiene el proceso de producción sobre estas características, y aplicar un método que tenga en cuenta los siguientes campos acoplados; mecánicos, estructurales, térmicos, magnéticos y eléctricos.

Mientras se desarrollan metodologías que permitan un cálculo preciso del comportamiento dinámico durante un cortocircuito externo, es suficiente con determinar el esfuerzo máximo presentado en el devanado y la frecuencia natural del sistema entero, para conocer la existencia o no de resonancia.

Durante la selección del método a implementar, se encontró mucha cercanía entre varios métodos para los criterios establecidos, en otras condiciones podría salir favorecido un método diferente, por lo tanto no se puede asegurar que el método escogido en este trabajo de grado sea el adecuado para otro problema particular.

### 5.1 TRABAJOS FUTUROS

Investigar y resolver los problemas encontrados en el método de Roth cuando se calcula la fuerza en cada punto, la fuerza axial acumulada en el devanado



secundario y se genera la gráfica de la distribución de la fuerza con respecto a la altura del devanado.

Estudiar el efecto que tiene el número de las divisiones en la altura y entregar un criterio que permita definir el número óptimo de divisiones que se debe utilizar.

Investigar y proponer una metodología que permita el análisis y aplicación de los campos acoplados a la condición de cortocircuito franco y establecer un procedimiento que permita hacer su verificación experimental.

Desarrollar una metodología que permita calcular los esfuerzos en otros elementos del transformador que conducen corriente, como tomas y conmutadores de derivaciones, conductores de conexión, etc., donde también pueden presentarse fallas.

## **BIBLIOGRAFÍA**

AHMAD, Ashfaq; JAVED, Iqra y NAZAR, Waseem. Short Circuit Stress Calculation in Power Transformer Using Finite Element Method on High Voltage Winding Displaced Vertically. En: International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, 11, Noviembre 2013. Vol. 3. 8 p. ISSN 2250-2459.

ANDERSEN, O.W. Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method. En: IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Volume: PAS-92. 7 p. ISSN: 0018-9510.

ANDERSON, David R., et al. Métodos cuantitativos para los negocios. 11 Ed. Cengage Learning Editores, Mexico, 2011. 834 p. ISBN 978-60-748-1498-9.

AZEVEDO, A. C. de, et al. Investigation of Transformer Electromagnetic Forces Caused by External Faults Using FEM. En: Transmission & Distribution Conference and Exposition: Latin America, 15-18 Agosto de 2006. Caracas, Venezuela. 6 p. ISBN: 1-4244-0287-5.

AZEVEDO, A. C. de, et al. Transformer mechanical stress caused by external short-circuit: a time domain approach. En: IPST (2007), Lion, Francia.

BASHIR, Mahdi Ebrahimi, et al. Analytical estimation of short circuit axial and radial forces on power transformers windings. En: IET Generation, Transmission & Distribution. 2014, Vol. 8, Iss. 2, pp. 250–260. ISSN: 1751-8687.

BERTAGNOLLI, Giorgio. Short-Circuit Duty of Power Transformers. 3 Ed. Zurich, Switzerland: ABB Management Services Ltd, 2007. 227 p.

DASGUPTA, Indrajit. Power Transformer Quality Assurance. New Age International, New Delhi, Enero 1, 2009. 585 p. ISBN: 978-81-224-2889-6.

DEACONU, Ioan-Dragoş, et al. Analytical Computation Method For Electrodinamic Forces Acting Over Electrical Transformer Windings. En: Scientific Bulletin, Series C: Electrical Engineering and Computer Science (2009). Vol. 71. 12 p. ISSN: 1454-234X.

DEL VECCHIO, Robert M., et al. Transformer Design Principles - With Application to Core-Form Power Transformers. 2 Ed. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2010. 597 p. ISBN 978-1-4398-0582-4.

FAIZ, Jawad; MAHDI EBRAHIMI, Bashir y NOORI Tahere. Three- and Two-Dimensional Finite-Element Computation of Inrush Current and Short-Circuit Electromagnetic Forces on Windings of a Three-Phase Core-Type Power Transformer. En: IEEE Transactions On Magnetics (mayo 2008). Vol. 44, No. 5. 8 p. ISBN: 1-4244-0320-0.

FOGELBERG, Thomas. Short-Circuit Withstand Capability of Power Transformers. En: ABB Review- Transformers and Substations. 2008, no. 1, p. 24-28. ISSN: 1013-3119.

KARSAI, Károly; KERÉNYI, Dénes y KISS, László. Large Power Transformers. (Studies in Electrical and Electronic Engineering, Vol 25), Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987. 614 p. ISBN: 9630541122.

KRAETGE, Alexander. Diagnosis of the short circuit duty of power transformers. En: Diagnostic Measurements on Power Transformers OMICRON, 2006. 6 p.

KULKARNI, S. V. y KHAPARDE, S. A. Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. 2 Ed. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2012. 750 p. ISBN 978-1-4398-5377-1.

LÓPEZ FERNÁNDEZ, Xose Manuel; ERTAN H. Bülent y TUROWSKI, Janusz. Transformers Analysis, Design, and Measurement. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2012. 623 p. ISBN 978-1-4665-0824-8.

MAHOMED, Nadim. Electromagnetic forces in transformers under short circuit conditions. En: Powertech Transformers Energize, march 2011. p. 36-40.

MALCOLM, Waters. The Short-Circuit Strength of Power Transformers. London: MacDonald, 1966. 155 p.

MCNUTT, William J., et al. Power Transformer Short Circuit Strength Requirements, Design and Demonstration. En: IEEE Trans. Power Apparatus and Systems. Nov./Dec. 1970, vol. PAS-89, p. 1955-1969. ISSN: 0018-9510.

PATEL, Mukund R. Instability of the continuously transposed cable under axial short-circuit forces in transformers. En: IEEE Transactions on Power Delivery, (07 de agosto de 2002). Vol. 17. 6 p. ISSN: 0885-8977.

ROSENTINO, Jr. Arnaldo José, et al. Modelling and Analysis of Electromechanical Stress in Transformers Caused by Short-Circuits. En: Renewable Energy and Power Quality Journal (2011). 6 p. ISSN: 2172-038X.

ŠTRAC, Leonardo; KELEMEN, Franjo y ŽARKO, Damir. Analysis of short-circuit forces at the top of the low voltage U-type and I-type winding in a power transformer. En: Conferencia Power Electronics and Motion Control, 2008. EPE-PEMC. 13th, 1-3 Septiembre de 2008. Poznan, Polonia. 4 p. ISBN: 978-1-4244-1741-4.

SYKULSKI, Jan K. Computational Magnetics. New York, USA: Chapman & Hall. 1995. 373 p. ISBN: 0412585707.

TUROWSKI, Janusz; TUROWSKI Marek y KOPEC, Mirosław. Method of three-dimensional network solution of leakage field of three-phase transformers. En: IEEE Transactions on Magnetics, (Sep. 1990) Vol. 26 , Issue: 5. 9 p. ISSN: 0018-9464.